УДК 517.535.6

И. П. Проскурня

Некоторые обобщения характеристик Р. Неванлинны и их свойства для мероморфных функций бесконечного нижнего порядка

Основной результат этой работы — утверждение, характеризующее точность утверждения а) теоремы 1 из работы [1].

Теорема. *Пусть* $B(r)$ — *любая непрерывная медленно растущая функция* ($B'(r) \geqslant 0$) *такая, что* $\lim\limits_{r\to\infty} B(r) = \infty$. *Существует функция* $\varphi(x) = x\, v(x) \in \Lambda_\infty^*$, *для которой* $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant r} (x+e_2)\dfrac{v'(x)}{v(x)} \ln\ln(x+e_2) = B(r)$ ($e_2 = e^e$), *множество* $C = C(\varphi)$ *мощности континуума и целая функция* $G(z)$ *бесконечного нижнего порядка, для которой* $D_\varphi(G) \supset C$.

Для доказательства теоремы, используя некоторые идеи работ [2—4] строим целую функцию бесконечного нижнего порядка, являющуюся примером типа примеров А. А. Гольдберга [5, 6], обладающую нужными нам свойствами.

Рассмотрим множество действительных чисел, допускающих представление (см. [2, с. 1333]).

$$C = \left\{a : a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\exp\Theta(n)}\right\}, \tag{1}$$

где γ_n принимает независимо два значения 0 и 1, причем в представлении для каждого a 1 встречается бесконечное число раз, и $\Theta(n) = \exp\exp\{2B^{-1}[\exp\exp(2n)]\}$. Очевидно, что при $n \geqslant k+2$, $k = 1, 2, \ldots$,

$$\Theta(n) - \Theta(k+1) - n + k > 0. \tag{2}$$

Нетрудно показать, что множество C имеет мощность континуума.

Заметим, что между множеством натуральных чисел $n = \sum\limits_{k=1}^{q(n)} \gamma_k 2^{k-1}$ ($\gamma_k = 0, 1$), где $\gamma_{q(n)} \neq 0$, и множеством

$$b_n = 1 + \sum_{k=1}^{q(n)} \frac{\gamma_k}{\exp\Theta(k)} \tag{3}$$

устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Пусть S — некоторое подмножество множества натуральных чисел, имеющее плотность* $d(S)$. Предположим, что δ_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) — положи-

---

* Определения класса Λ_A ($A \geqslant 0$), множества $D_\varphi(G)$ приведены в работе [1].

* Т. е. $d(S) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t(n, S)}{n}$, где $t(n, S)$ — количество чисел из S, не превышающих n.

тельные числа, такие, что $\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu = 1$. Известно (см. [3, с. 133]), что множество натуральных чисел можно разбить на счетное множество попарно не пересекающихся множеств S_ν с плотностью δ_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$.

Разобьем множество натуральных чисел следующим образом:

$$S_\nu = \{n : n = 2^\nu(2k+1)|_{k=1}^{\infty}\} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots), \qquad S_0 = \{n : n = (2k+1)|_{k=1}^{\infty}\}.$$

Очевидно, что $d(S_\nu) = \frac{1}{2^{\nu+1}}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ и $\sum_{\nu=0}^{\infty} d(S_\nu) = 1$. Проверим, что $S_\nu \cap S_\mu = \varnothing$ при $\nu \neq \mu \neq 0$. Действительно, если $2^\nu(2k+1) = 2^\mu(2m+1)$ $(k, m = 1, 2, \ldots)$ и $\mu < \nu$, то $2^{\nu-\mu}(2k+1) = 2m+1$, что невозможно, так как справа стоит нечетное число, а слева — четное. Аналогично убеждаемся, что $S_\nu \cap S_\mu = \varnothing$ и при $\mu > \nu$.

Пусть последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ определяется соотношением (3), $b_0 = 1$. Определим последовательность $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Положим $c_{-n} = c_n$, где при $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$c_n = b_\nu, \text{ если } n \in S_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Тогда очевидно, что

$$G(z) = \exp(-e^z - z)\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n E_n(z), \tag{5}$$

где $E_n(z)$ — функции, определенные в [3, с. 129] (см. также [2, с. 1335] и [4, с. 192]), есть целая функция.

Для этой функции $G(z)$ справедливы следующие утверждения.

Лемма 1 (см. [3, с. 129], [4, с. 193]). *Если $z = x + iy$, $x \geqslant r_0 \geqslant \frac{\pi}{2}$ и $(2m-1)\pi < y < (2m+1)\pi$ (m — фиксировано, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), тогда имеет место неравенство**

$$|G(z) - c_m| \leqslant K_1 |z| |\exp(-e^z - z)|. \tag{6}$$

Если $z \in A^{(\nu)}$, где

$$A^{(\nu)} = \{z : z = x + iy,\ x > 0,\ (2l-1)\pi < y < (2l+1)\pi, |l| \in S_\nu\}, \tag{7}$$

тогда из соотношений (4) и (6) следует такое утверждение.

Лемма 2. *Для функции $G(z)$ при любом фиксированном ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) и $z = x + iy \in A^{(\nu)}$ $\left(x \geqslant r_0 \geqslant \frac{\pi}{2}\right)$ справедлива оценка $|G(z) - b_\nu| \leqslant K_1|z||\exp(-e^z - z)|$.*

Зафиксируем некоторое число $a \in C$, где множество C определяется соотношением (1). Представление (1) числа a порождает последовательность целых неотрицательных чисел

$$n_1(a) = \gamma_1(a),\ n_2(a) = \gamma_1(a) + \gamma_2(a)2, \ldots, n_k(a) = \gamma_1(a) + \ldots$$
$$\ldots + \gamma_k(a)2^{k-1}, \ldots . \tag{8}$$

Так как в представлении (1) числа a единица встречается бесконечное число раз, то $n_k(a) \to \infty$ при $k \to \infty$.

---

* Буквой K с индексами будем обозначать положительные абсолютные постоянные.

Положим для числа a

$$b_{n_k(a)} = 1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{\gamma_j}{\exp \Theta(j)}, \tag{9}$$

где $\gamma_j = \gamma_j(a)$ определяется соотношением (8).

Таким образом, числу a соответствует подпоследовательность $\{b_{n_k(a)}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, определенной соотношением (3).

Выберем любое r $(r > r_0)$ и рассмотрим возможные случаи расположения последовательности $\{n_k(a)\}_{k=1}^{\infty}$ (принимаем во внимание только $n_k(a) \neq 0$).

1. Найдется хотя бы одно $n_{k_0}(a) \in \{n_k(a)\}_{k=1}^{\infty}$, такое, что при выбранном фиксированном r

$$\frac{1}{2} \ln B(\ln r) \leqslant n_{k_0}(a) \leqslant \ln B(\ln r). \tag{10}$$

Будем оценивать скорость приближения $G(z)$ к a на системе полуполосок $A^{(n_{k_0}(a))}$, $|z| = r$, где $A^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ определяются соотношением (7). При этом будем считать, что $B(r) = o(\ln \ln r)$ при $r \to \infty$. Так как у нас $n_{k_0}(a)$ удовлетворяет условию (10) $(\ln B(\ln r) = o(\ln \ln \ln \ln r),\ r \to \infty)$, то на окружности $|z| = r$ существуют $z \in A^{(n_{k_0}(a))}$. Действительно, при $z \in A^{(n_{k_0}(a))}$ $(z = x + iy)$ $y = 2^{n_{k_0}(a)} \cdot 3,\ 2^{n_{k_0}(a)} \cdot 5, \ldots$ и поэтому число t полуполосок из $A^{(n_{k_0}(a))}$, попавших в круг $|z| \leqslant r$, оценивается снизу следующим образом: $t(r) \geqslant K_2 \dfrac{r}{\ln \ln \ln r}$.

Согласно утверждению леммы 2 на системе полуполосок $A^{(n_{k_0}(a))}$ при $x \geqslant r_0 \geqslant \dfrac{\pi}{2}$ $(z = x + iy)$ выполняется оценка

$$|G(z) - b_{n_{k_0}(a)}| \leqslant K_1 \, |z| \, |\exp(-e^z - z)|. \tag{11}$$

Далее имеем $b_{n_{k_0}(a)} = 1 + \sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{\gamma_i}{\exp \Theta(j)}$ и в силу неравенства (2)

$$0 \leqslant a - b_{n_{k_0}(a)} \leqslant \sum_{j=k_0+1}^{\infty} \frac{\gamma_j}{\exp \Theta(j)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\exp \Theta(k_0 + 1)} \left\{1 + \sum_{j=k_0+2}^{\infty} \frac{1}{\exp[\Theta(j) - \Theta(k_0 + 1)]}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\exp \Theta(k_0 + 1)} \left\{1 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\exp(j - k_0)}\right\} =$$

$$= \left\{1 + \frac{1}{(e-1)e}\right\} \frac{1}{\Theta(k_0 + 1)} \leqslant \frac{3}{2 \exp \Theta(k_0 + 1)}. \tag{12}$$

С другой стороны соотношения (8) и (10) показывают, что $\frac{1}{2} \ln B(\ln r) \leqslant$ $\leqslant n_{k_0}(a) \leqslant \sum\limits_{l=1}^{k_0} 2^{l-1} = 2^{k_0} - 1$. Поэтому $e^{k_0} > \frac{1}{2} \ln B(\ln r)$ и, значит,

$$\Theta(k_0 + 1) \geqslant \exp r^2. \tag{13}$$

Используя оценки (12) и (13), имеем

$$0 \leqslant a - b_{n_{k_0}(a)} \leqslant \frac{3}{2 \exp \exp r^2}. \tag{14}$$

Берем, далее, любое $z(a) = x + iy \in A^{(n_{k_0}(a))}$ $(|z(a)| = r)$. Полученные оценки (11) и (14) приводят нас к такому соотношению $\left(x > \frac{\pi}{2}\right)$:

$$|G(z(a)) - a| \leqslant |G(z(a)) - b_{n_{k_0}(a)}| + |b_{n_{k_0}(a)} - a| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{K_1 |z(a)|}{\exp(e^x \cos y + x)} + \frac{3}{2 \exp \exp r^2} \leqslant \frac{K_3}{\exp(e^x \cos y + x)}.$$

Значит,

$$\ln^+ \frac{1}{|G(z(a)) - a|} \geqslant e^x \cos y + x - \ln^+ K_3 - \ln r \geqslant e^x \cos y - K_4 \ln r. \tag{15}$$

Пусть $A'_n = \left\{z : z = x + iy, \quad x > 0, \left(2n - \frac{1}{4}\right)\pi < y < \left(2n + \frac{1}{4}\right)\pi\right\}$. Положим

$$\omega_1 = \{\bigcup_{(n)} A'_n\} \cap \left\{z : |\arg z| < \frac{\pi}{6}\right\}$$

и

$$\omega_2(\nu) = \{\Theta : z = re^{i\Theta} \in A^{(\nu)} \cap \omega_1\}. \tag{16}$$

Легко заметить, что при $z(a) \in \omega_1$ и $z(a) = re^{i\Theta}$, $r > r_0(\varepsilon)$ ($r_0(\varepsilon)$ — не зависит от Θ), справедливо неравенство $e^x \cos y - K_4 \ln r = e^{r\cos\Theta} \cos(r \sin\Theta) - K_4 \ln r \geqslant (1 - \varepsilon) e^{r\cos\Theta} \cos(r \sin\Theta)$. Поэтому соотношение (15) можем привести к виду

$$\ln^+ \frac{1}{|G(re^{i\Theta}) - a|} \geqslant \frac{1}{2} e^{r\cdot\cos\Theta} \cos(r \sin\Theta). \tag{17}$$

Пусть* $\varphi_0(x) = xv(x) = x \exp\left\{\int\limits_{e}^{\ln(x+e_2)} \frac{B(s)}{\ln s} ds\right\}$ и

$$y(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|G(re^{i\Theta}) - a|} v\left(\ln^+ \frac{1}{|G(re^{i\Theta}) - a|}\right) d\Theta.$$

При $z(a) \in \omega_2(n_{k_0}(a))$ $(z(a) = re^{i\Theta})$, где $\omega_2(\nu)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ определяется соотношением (16), имеем $\left(r \text{ — фиксировано, } r > \frac{2}{\sqrt{3}} r_0\right)$:

$$y(r, a) \geqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\arccos\frac{r_0}{r}}^{\arccos\frac{r_0}{r}} \ln^+ \frac{1}{|G(re^{i\Theta}) - a|} e^{e^{\int\limits_e^{\ln\left(\ln^+ \frac{1}{|G(re^{i\Theta}) - a|} + e_2\right)} \frac{B(s)}{\ln s} ds}} d\Theta \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\omega_2(a)} e^{r\cdot\cos\Theta + \int\limits_e^{r\cos\Theta + \ln\frac{\sqrt{2}}{4}} \frac{B(s)}{\ln s} ds} \cos(r \sin\Theta)\, d\Theta =$$

---

* Функция $v(x)$ — решение уравнения $(x + e_2) \frac{v'(x)}{v(x)} \ln \ln (x + e_2) = B(\ln(x + e_2))$, где $B(x)$ удовлетворяет условиям доказываемой теоремы.

$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{r\cos\Theta + \int\limits_{e}^{r\cos\Theta + \ln\frac{\sqrt{2}}{4}} \frac{B(s)}{\ln s} ds} F_{n_{k_0}(a)} (r \cdot \sin\Theta)\, d\Theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} e^{r\cos\Theta + \int\limits_{e}^{r\cos\Theta + \ln\frac{\sqrt{2}}{4}} \frac{B(s)}{\ln s} ds} F_{n_{\tilde{k}_0}(a)} (r \sin\Theta)\, d\Theta,$$

где $F_\nu (y)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ определяется соотношением

$$F_\nu (y) = \begin{cases} \cos y, \text{ если } \left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi < y < \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi, \ |n| \in S_\nu, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть

$$\psi_{n_{k_0}(a)} (y) = \int\limits_0^y F_{n_{k_0}(a)} (t)\, dt,$$

$$\varkappa (y) = \varkappa (y, r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 - y^2}} e^{\sqrt{r^2-y^2} + \int\limits_{e}^{\sqrt{r^2-y^2} + \ln\frac{\sqrt{2}}{4}} \frac{B(s)}{\ln s} ds}.$$

Заметим, что при $y > \ln r$ $(z = x + iy)$ число полуполосок из $A^{(n_{k_0}(a))}$ $t\,(y, S_{n_{k_0}(a)}) \geqslant \frac{y}{e2^{\ln B(\ln r)}}$. Значит, при $r > r_0 (a)$ (r — фиксировано)

$$\psi_{n_{k_0}(a)} (y) \geqslant \left[t\left(\frac{y}{2\pi},\ S_{n_{k_0}(a)}\right) - 1 \right] \int\limits_0^{2\pi} F_{n_{k_0}(a)} (t)\, dt \geqslant \frac{y}{4 \cdot 2^{\ln B(\ln r)}}.$$

Далее, при $0 \leqslant y \leqslant \frac{r}{2}$ имеем $\varkappa' (y) \leqslant 0$. Положим $r \sin\Theta = y$. Тогда

$$y (r, a) \geqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{r/2} \frac{1}{\sqrt{r^2 - y^2}} e^{\sqrt{r^2-y^2} + \int\limits_{e}^{\sqrt{r^2-y^2} + \ln\frac{\sqrt{2}}{4}} \frac{B(s)}{\ln s} ds} F_{n_{k_0}(a)} (y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{r/2} \varkappa (y)\, \psi'_{n_{k_0}(a)} (y)\, dy.$$

нтегрируя по частям и проводя элементарные вычисления, получаем: $y (r, a) \geqslant \frac{1}{8\pi 2^{\ln B(\ln r)}} \int\limits_{\ln r}^{r/2} \varkappa (y)\, dy$. Пусть $\sqrt{r^2 - y^2} = r - u$; $1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha$. Тогда имеем

$$\int\limits_{\ln r}^{r/2} \varkappa (y)\, dy = \int\limits_{r - \sqrt{r^2 - \ln r}}^{\alpha r} e^{r - u + \int\limits_{e}^{r-u+\ln\frac{\sqrt{2}}{4}} \frac{B(s)}{\ln s} ds} (2ru - u^2)^{1/2}\, du \geqslant$$

$$\geqslant \frac{e^r}{\sqrt{2r}} e^{\int\limits_e^{\ln(e^r+e_2)} \frac{B(s)}{\ln s} ds} \int\limits_{\frac{\ln^2 r}{r}}^{\alpha r} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left(1 - \frac{u}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\int\limits_{r-u+\ln\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\ln(e^r+e_2)} \frac{B(s)}{\ln s} ds} du \geqslant$$

$$\geqslant \frac{e^r}{\sqrt{2r}} v(e^r) \int\limits_{\frac{\ln^2 r}{r}}^{\ln r} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\int\limits_{r-u+\ln\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\ln(e^r+e_2)} \frac{B(s)}{\ln s} ds} du.$$

Так как $B(r) = o(\ln\ln r)$ $(r \to \infty)$, то при $\ln^2 r/r \leqslant u \leqslant \ln r$ имеем

$$\int\limits_{r-u+\ln\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\ln(e^r+e_2)} \frac{B(s)}{\ln s} ds \leqslant \int\limits_{r-u+\ln\frac{\sqrt{2}}{4}}^{r+\frac{e_2}{e^r}} \frac{B(s)}{\ln s} ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{B\left(r + \frac{e_2}{e^r}\right)}{\ln\left(r - u + \ln\frac{\sqrt{2}}{4}\right)} \left\{u + \frac{e_2}{e^r} - \ln\frac{\sqrt{2}}{4}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{B\left(r + \frac{e_2}{e^r}\right)}{\ln\left[r - \ln r + \ln\frac{\sqrt{2}}{4}\right]} (u + 2e) \leqslant u + 2e.$$

Поэтому $(r > r_0 > e)$

$$y(r, a) \geqslant \frac{1}{8\sqrt{2}\pi \cdot e^{2e}} \frac{e^r}{\sqrt{r}} \frac{v(e^r)}{2^{\ln B(\ln r)}} \cdot \int\limits_{\frac{\ln^2 r}{r}}^{\ln r} \frac{e^{-2u}}{\sqrt{u}} du \geqslant$$

$$\geqslant e^{-12} \frac{e^r}{\sqrt{r}} \frac{v(e^r)}{2^{\ln B(\ln r)}} \cdot \int\limits_{1/4}^{1} \frac{e^{-2u}}{\sqrt{u}} du \geqslant e^{-15} \frac{e^r}{\sqrt{r}} \frac{v(e^r)}{2^{\ln B(\ln r)}}.$$

Из результатов работы [3, с. 132] следует, что $\frac{e^r}{2\sqrt{r}} \leqslant T(r) = T(r, G) \leqslant \leqslant \frac{e^r}{\sqrt{r}}$ $(r > r_0)$. Поэтому при $r > r_0$

$$\ln T(r) \leqslant r \leqslant 2\ln T(r) \tag{18}$$

и, значит ($B(x)$ — медленно растущая функция (см. [7, с. 72]),

$$\ln B(\ln r) \leqslant \ln B(2\ln\ln T(r)) \leqslant \ln[(1+\varepsilon) B(\ln\ln T(r))] \leqslant$$
$$\leqslant \ln B(\ln\ln T(r)) + \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0). \tag{19}$$

Оценки (17), (18) и (19) дают $y(r, a) \geqslant e^{-16} T(r) \frac{v(T(r)\sqrt{\ln T(r)})}{2^{\ln B(\ln\ln T(r))}}$. Таким образом, получили

$$\varphi(m_\varphi(r, a)) \geqslant e^{-16} T(r) \frac{v(T(r)\sqrt{\ln T(r)})}{2^{\ln B(\ln\ln T(r))}}. \tag{20}$$

Далее, при $r > r_0(B)$ находим

$$\ln \frac{v(T(r)\sqrt{\ln T(r)})}{v(T(r)\, 2^{\ln B(\ln\ln T(r))})} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{B\{\ln T(r)\, 2^{\ln B(\ln\ln T(r))} + e_2\}}{\ln\{\ln[T(r) + \sqrt{\ln T(r)} + e_2]\}} \ln \frac{T(r)\sqrt{\ln T(r)} + e_2}{T(r)\, 2^{\ln B(\ln\ln T(r))} + e_2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{B(\ln T(r))}{1 + \dfrac{\dfrac{1}{2}\ln\ln T(r) + \dfrac{e_2}{T(r)\sqrt{\ln T(r)}}}{\ln T(r)\ln\ln T(r)}} \left[\frac{1}{2} - \frac{\ln B(\ln\ln T(r)\cdot \ln 2}{\ln\ln T(r)}\right] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{3} B(\ln T(r)).$$

Следовательно,

$$\frac{v(T(r)\sqrt{\ln T(r)})}{v(T(r)\, 2^{\ln B(\ln\ln T(r))})} \geqslant e^{\frac{1}{3}B(\ln T(r))}. \tag{21}$$

Из оценок (20) и (21) находим

$$\varphi(m_\varphi(r, a)) \geqslant e^{-16}\, T(r) \frac{e^{\frac{1}{3}B(\ln T(r))}}{2^{\ln B(\ln\ln T(r))}} v(T(r)\, 2^{\ln B(\ln\ln T(r))}) \geqslant$$

$$\geqslant e^{-16} T(r)\, 2^{\ln B(\ln\ln T(r))} v(T(r)\, 2^{\ln B(\ln\ln T(r))}) \geqslant$$

$$\geqslant \varphi(e^{-16} T(r)\, 2^{\ln B(\ln\ln T(r))}).$$

Отсюда для $m_\varphi(r, a)$ в первом случае имеем

$$m_\varphi(r, a) \geqslant e^{-16} T(r)\, 2^{\ln B(\ln\ln T(r))}. \tag{22}$$

2. Пусть ни при одном $n_k(a)$ не выполняется неравенство (10). Здесь возможны такие два случая.

а) Имеется хотя бы одно $n_k(a) < \frac{1}{2}\ln B(\ln r)$ ($r > r_0$, r — фиксировано). Пусть

$$\max_{n_k(a) < \frac{1}{2}\ln B(\ln r)} n_k(a) = n_{k_1}(a) < \frac{1}{2}\ln B(\ln r) \tag{23}$$

и $n_{k_1+j}(a)$ — первое число, определенное соотношением (8), большее $n_{k_1}(a)$ и отличное от $n_{k_1}(a)$. Очевидно,

$$n_{k_1+j}(a) > \ln B(\ln r). \tag{24}$$

Как и выше, числу $n_{k_1}(a)$ соответствует число $b_{n_{k_1}(a)} \in \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и, значит, существует система полосок $A^{(n_{k_1}(a))}$, на которых выполняется условие (11). В этом случае будем оценивать скорость приближения $G(z)$ к a при $z \in A^{(n_{k_1}(a))}$ ($|z| = r$). Имеем

$$0 \leqslant a - b_{n_{k_1}(a)} \leqslant \sum_{i=k_1+j}^{\infty} \frac{\gamma_i}{\exp\Theta(i)} \leqslant \frac{3}{2\exp\Theta(k_1 + j)}. \tag{25}$$

Выберем любое $z(a)=x+iy\in A^{(n_{k_1}(a))}$, тогда из (24) и (25), так же, как и при получении оценки (15), находим $\ln^+\frac{1}{|G(re^{i\theta})-a|}\geqslant e^x\cos y-K_4\ln r$, поэтому и в рассматриваемом случае при $r>r_1(a)$ выполняется неравенство

$$m_\varphi(r,a)\geqslant e^{-16}T(r)\,2^{\ln B(\ln\ln T(r))}. \tag{26}$$

б) Пусть не выполняется соотношение (23), т. е. при данном r $n_\mu(a)=\min_k n_k(a)>\ln B(\ln r)$. В этом случае в разложении (1) для a выполняется $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\mu}=0$ ($\mu=\mu(r)$, $r>r_0$ — фиксировано), поэтому будем оценивать величину отклонения $G(z)$ от b_0 ($b_0=1$). Согласно изложенному, для b_0 также существует система полуполосок $A^{(0)}$, на которых выполняется оценка $|G(z)-b_0|\leqslant K_1|z||\exp(-e^z-z)|$. Будем теперь оценивать скорость приближения $G(z)$ к a при $z\in A^{(0)}$ ($|z|=r$). Имеем

$$0\leqslant a-b_0=\sum_{k=\mu}^{\infty}\frac{\gamma_k}{\exp\Theta(k)}\leqslant\frac{3}{2\exp\Theta(\mu)}.$$

Как и выше, снова убеждаемся в справедливости (26).

Так как для неванлинновской характеристики функции $G(z)$ справедлива оценка

$$T(r,G)\leqslant\frac{e^r}{\sqrt{r}}\qquad(r>r_0), \tag{27}$$

то оценки (22), (26) и (27) дают для любого $a\in C$: $\delta_\varphi(a,G)=\infty$. Тем самым теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Проскурня И. П. Некоторые обобщения характеристик Р. Неванлинны и их свойства.— Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 6, с. 781—790.
2. Петренко В. П. Изучение структуры множества положительных отклонений мероморфных функций. I.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1969, **33**, № 6, с. 1330—1348.
3. Хейман У. Мероморфные функции.— М.: Мир, 1966.— 288 с.
4. Проскурня И. П. К вопросу о росте мероморфных функций бесконечного нижнего порядка.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1973, вып. 17, с. 190—200.
5. Гольдберг А. А. О дефектах мероморфных функций.— ДАН СССР, 1954, **98**, № 6, с. 893—895.
6. Гольдберг А. А. О множестве дефектных значений мероморфных функций конечного порядка.— Укр. мат журн., 1959, **11**, № 4, с. 438—443.
7. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций.— М.: Наука, 1970.— 592 с.

Харьковский
государственный университет

Поступила в редакцию
25.V 1978 г.