УДК 519.21

В. Л. Гирко

Предельные теоремы для неотрицательно определенных квадратичных форм некоторых зависимых случайных величин

Пусть $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(n)}\xi_{in}\xi_{jn}$, $n=1, 2, \ldots$, — неотрицательно определенные квадратичные формы, $a_{ij}^{(n)}$ — неслучайные числа, $a_{ij}^{(n)}=a_{ji}^{(n)}$, $\xi_i^{(n)}$, $i=\overline{1, n}$, $n=1, 2, \ldots$, — случайные величины и $\mathbf{M}(\xi_{in}/\sigma_i^{(n)})=0$, где $\sigma_i^{(n)}$ — минимальная σ-алгебра, относительно которой измеримы случайные величины $\xi_{i+1n}, \ldots$ $\ldots, \xi_{nn}$.

В данной работе найдены условия, при выполнении которых распределение квадратичной формы $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(n)}\xi_{in}\xi_{jn}$ при больших n можно приближенно заменить распределением квадратичной формы $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(n)}\gamma_{in}\gamma_{jn}$, где γ_{in}, $i=\overline{1, n}$ — некоторые независимые случайные величины. Отметим, что предельные теоремы для некоторых квадратичных форм, образованных из стационарных последовательностей, рассматривались в работе [1]. Предельные теоремы для сумм $\sum_{i=1}^{n}\xi_{in}$ изучались во многих работах (см., например, [2 — 5] и дальнейшие ссылки).

Обозначим через η_{in}, $i=\overline{1, n}$, независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону с нулевым вектором средних и матрицей ковариаций $2A_n$, $A_n=(a_{ij})$, $i, j=\overline{1, n}$, случайные величины η_{in} не зависят от величин ξ_{in}, $i=\overline{1, n}$, $n=1, 2, \ldots$

Теорема 1. *Пусть*

$$\lim_{a\downarrow 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbf{M}\sum_{k=1}^{n}\eta_{kn}^2\mathbf{M}(\xi_{kn}^2/\bar{\sigma}_{kn})\left[\exp\left\{-a\sum_{l=k}^{n}\mathbf{M}(\xi_{ln}^2/\bar{\sigma}_{ln})\,\eta_{ln}^2\right\}-1\right]=0, \quad (1)$$

где $\bar{\sigma}_{kn}$ — минимальная σ-алгебра, относительно которой измеримы величины $\xi_{i+1n}, \ldots, \xi_{nn}, \eta_{in}$, $i=\overline{1, n}$, для любого $s\in[0, S]$, $S>0$ — произвольное постоянное число, и $a>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}\sum_{k=1}^{n}|\mathbf{M}(\beta_k/\bar{\sigma}_{kn})|^2=0, \quad (2)$$

где $\beta_k=(e^{is\nu_{kn}}-is\nu_{kn}-1)$, $\nu_{kn}=\xi_{kn}\eta_{kn}\exp\left(-a\sum_{l=k}^{n}\mathbf{M}(\xi_{ln}^2\eta_{ln}^2/\bar{\sigma}_{ln})\right)$, $k=$ $=\overline{1, n}$,

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{\mathbf{M}(\beta_k/\bar{\sigma}_{kn})-\mathbf{M}(\beta_k/\eta_{kn})\}=0. \quad (3)$$

Тогда для любого $q\in[0, S^2]$

$$\lim_{n\to\infty}[\mathbf{M}e^{-q\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(n)}\xi_{in}\xi_{jn}}-\mathbf{M}e^{-q\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(n)}\gamma_{in}\gamma_{jn}}]=0, \quad (4)$$

где γ_{in}, $i=\overline{1, n}$ — независимые случайные величины, распределенные по безгранично делимым законам с характеристическими функциями $\mathbf{M}\exp(is\gamma_{kn})=\exp[\mathbf{M}\exp(is\gamma_{kn})-1]$.

Доказательство. Очевидно, что $\mathbf{M}\exp\left(-q\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(n)}\xi_{in}\xi_{jn}\right)=$ $=\mathbf{M}\exp\left\{is\sum_{i=1}^{n}\xi_{in}\eta_{in}\right\}$, где $s=\sqrt{q}$, $q\geqslant 0$. Будем считать, что $0\leqslant s\leqslant S$. Используя условие (1), получаем, что

$$\lim_{a\downarrow 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\mathbf{M}\exp\left\{is\sum_{i=1}^{n}\xi_{in}\eta_{in}\right\}-f_n(s)\right]=0, \tag{5}$$

где $f_n(s)=\mathbf{M}\exp\left\{is\sum_{k=1}^{n}\nu_{kn}\right\}$.

Рассмотрим выражение

$$g_n(s)=\mathbf{M}\left[\exp\left\{is\sum_{k=1}^{n}\nu_{kn}-\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}(\beta_{kn}/\bar\sigma_{kn})\right\}-1\right]m_n(s).$$

Здесь $m_n(s)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}(\beta_{kn}/\bar\sigma_{kn})\right\}$. Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{n}|\mathbf{M}(\beta_{kn}/\bar\sigma_{kn})|\leqslant\frac{s^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}(\xi_{kn}^2\eta_{kn}^2/\bar\sigma_{kn})\exp\left\{-2a\sum_{l=k}^{n}\mathbf{M}(\xi_{kn}^2\eta_{kn}^2/\bar\sigma_{kn})\right\}. \tag{6}$$

Так как для любой последовательности вещественных чисел $a_i\geqslant 0$, $i=\overline{1,n}$,

$$a_1e^{-a_1}+a_2e^{-a_1-a_2}+\ldots+a_ne^{-a_1-\ldots-a_n}\leqslant\sum_{k=1}^{n}[e^{-a_1-\ldots-a_k}-$$
$$-e^{-a_1-\ldots-a_{k+1}}]=e^{-a_1}-e^{-a_1-\ldots-a_n},$$

то, используя (6), имеем

$$\sum_{k=1}^{n}|\mathbf{M}(\beta_{kn}/\bar\sigma_{kn})|\leqslant s^2/2a. \tag{7}$$

Поэтому, используя (3), получаем

$$g_n(s)=\mathbf{M}\left[\exp\left\{is\sum_{k=1}^{n}\nu_{kn}-\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}(\beta_{kn}/\bar\sigma_{kn})\right\}-1\right]\varphi_n(s)+o(1), \tag{8}$$

где $\varphi_n(s)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}(\beta_{kn}/\eta_{kn})\right\}$.

Представим (8) в следующем виде:

$$g_n(s)=\mathbf{M}\sum_{l=1}^{n}[\exp\{is\nu_{ln}-\mathbf{M}(\beta_{ln}/\bar\sigma_{ln})\}-1]\theta_l\varphi_n(s)+o(1), \tag{9}$$

где $\theta_l=\exp\left\{is\sum_{k=l+1}^{n}\nu_{kn}-\sum_{k=l+1}^{n}\mathbf{M}(\beta_{ln}/\bar\sigma_{ln})\right\}$.

В этой и других аналогичных формулах считаем, что $\theta_n\equiv 0$. Очевидно, что (9) равно:

$$g_n(s)=\sum_{l=1}^{n}\mathbf{M}[1+\mathbf{M}(\beta_{ln}/\bar\sigma_{ln})-e^{\mathbf{M}(\beta_{ln}/\bar\sigma_{ln})}]e^{-\mathbf{M}(\beta_{ln}/\bar\sigma_{ln})}\theta_l\varphi_n(s)+o(1).$$

Отсюда, используя (2), (7) и (3), получаем $\lim_{n\to\infty}\left|\mathbf{M}\exp\left\{is\sum_{k=1}^{n}\nu_{kn}\right\}-\right.$ $\left.-\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}(\beta_{ln}/\eta_{ln})\right\}\right|=0$. Но тогда из (5) на основании (1) следует $\lim_{a\downarrow 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\mathbf{M}\exp\left\{is\sum_{k=1}^{n}\nu_{kn}\right\}-\mathbf{M}\exp\left\{is\sum_{k=1}^{n}\gamma_{kn}\eta_{kn}\right\}\right|=0$. Отсюда и из (5) вытекает (4). Теорема 1 доказана.

Отметим, что $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(n)}\gamma_{in}\gamma_{jn}$ являются квадратичными формами независимых случайных величин и для нахождения их предельных распределений можно использовать результаты работ [6 — 7].

Теорема 2. *Пусть выполняется условие* (1),

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\eta_{kn}^2(\mathbf{M}(\xi_{kn}^2/\sigma_{kn})-\mathbf{M}\xi_{kn}^2)=0,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}\xi_{kn}^2a_{kk}<\infty \tag{10}$$

и выполняется условие Линдеберга: для любого $\tau > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\tau} x^2 d\mathbf{P}\{\sqrt{a_{kk}^{(n)}}\, \xi_{kn} < x\} = 0. \tag{11}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} [\mathbf{M}e^{-q\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(n)} \xi_{in}\xi_{jn}} - \det(\mathrm{I} + 2q\,(a_{ij}\sigma_i\sigma_j)_{i,j=1}^{n})^{-1/2}] = 0, \tag{12}$$

где $q \geqslant 0$, $\sigma_i = \sqrt{\mathbf{M}\,[\xi_i^{(n)}]^2}$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{n} |\mathbf{M}\,(\beta_k/\bar{\sigma}_{kn})^2| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\tau} x^2 d\mathbf{P}\,\{\sqrt{a_{kk}^{(n)}}\xi_{kn} < x/\sigma_{kn}\} +$$

$$+ \tau \left| \frac{\eta_k}{\sqrt{a_{kk}}} \right| \sum_{k=1}^{n} \eta_k^2 \mathbf{M}\,(\xi_{kn}^2/\sigma_{kn}).$$

В этой и следующих формулах считаем, что $\eta_k/\sqrt{a_{kk}} = 0$, если $a_{kk} = 0$. Отсюда, используя условия (10), (11), получаем, что справедливо выражение (2).

Заметим, что

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\,(\beta_k/\bar{\sigma}_{kn}) - \sum_{k=1}^{n} \frac{s^2}{2}\,(\mathbf{M}\xi_{kn}^2)\,\eta_{kn}^2 \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{s^2}{2} \left| \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{M}\,(\xi_{kn}^2/\sigma_{kn}) - \mathbf{M}\xi_{kn}^2)\,\eta_{kn}^2 \right| + \varepsilon \frac{|s|^3}{6} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\eta_{kn}}{\sqrt{a_{kk}}} \right|^3 \mathbf{M}((\xi_{kn}\sqrt{a_{kk}})^2/\sigma_{kn}) +$$

$$+ s^2 \sum_{k=1}^{n} \eta_{kn}^2 \mathbf{M}\,\{\xi_{kn}^2 \chi\,(|\,\xi_{kn}\sqrt{a_{kk}}\,| > \varepsilon)/\sigma_{kn}\} + \sum_{k=1}^{n} \eta_{kn}^2 \mathbf{M}\,(\xi_{kn}^2/\sigma_{kn}) \times$$

$$\times \exp\left\{-a \sum_{l=k}^{n} \eta_{kn}^2 \mathbf{M}\,(\xi_{kn}^2/\sigma_{kn})\right\}.$$

Из этого неравенства вытекает

$$\lim_{n\to\infty} \left[\mathbf{M} \exp\left\{-q \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(n)} \xi_{in}\xi_{jn}\right\} - \mathbf{M} \exp\left\{-\frac{q}{2} \sum_{k=1}^{n} \eta_{kn}^2 \sigma_{kn}^2\right\} \right] = 0.$$

Отсюда получаем (12). Теорема 2 доказана.

Заметим, что условие (1) выполняется, если

$$\lim_{h\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathbf{M} \sum_{k=1}^{n} \eta_{kn}^2 \mathbf{M}\,(\xi_{kn}^2/\sigma_{kn})\, \chi\left(\sum_{k=1}^{n} \eta_{kn}^2 \mathbf{M}\,(\xi_{kn}^2/\sigma_{kn}) > h\right) = 0;$$

условие (2) выполняется, если для любого $\varepsilon > 0$ $\lim_{n\to\infty} \mathbf{M} \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{M}\eta_{kn}^2\xi_{kn}^2/\bar{\sigma}_{kn}) \times \mathbf{P}\,\{\eta_{kn}^2\xi_{kn}^2 > \varepsilon/\bar{\sigma}_{kn}\} = 0$, вместо условия (3) можно взять условие $\operatorname{plim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \times \{\mathbf{M}\,(\alpha_k/\bar{\sigma}_{kn}) - \mathbf{M}\,(\alpha_k/\eta_{kn})\} = 0$, где

$$\alpha_k = (e^{is\xi_{kn}\eta_{kn}} - is\xi_{kn}\eta_{kn} - 1).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Малевич Т. Л. Предельные теоремы для квадратичных форм, образованных из стационарных последовательностей.— В кн.: Предельные теоремы и вероятностные процессы.— Ташкент, Фан, 1967.
2. Billingsley P. The Lindebery — Levy theorem for martingales.— Proc. Amer. Math. Soc. 1961, 12, p. 788—792.
3. Brown B. M. Martingale central limit theorems.— Ann. Math. Statist. 1971, 42, p. 59—66.

4. Brown B. M., Eacleson G. K. Martingale convergence to infinitely divisible lows with finite variances.— Trans. Amer. Math. Soc. 1971, **162**, p. 449—453.
5. Ибрагимов И. А. Центральная предельная теорема для одного класса зависимых случайных величин.— Теор. вероятн. и ее применен., 1963, **8**, вып. 1, с. 89—94.
6. Гирко В. Л. О предельных теоремах для случайных квадратичных и билинейных форм.— Теория случайных процессов, 1973, вып. 2, с. 34—37.
7. Гирко В. Л. Случайные матрицы.— Киев: Вища школа, 1975.— 447 с.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
14.III 1979 г.