УДК 517.91

Г. Д. Завалыкут

Периодические решения одного дифференциального уравнения с полиномиальной правой частью

Будем рассматривать дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = \mu(t, x) \prod_{j=1}^{n} (x - P_j(t)), \tag{1}$$

где $P_j(t)$ — 2π-периодические, непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям $P_0 \leqslant P_1(t) < P_2(t) < \ldots < P_n(t) \leqslant P^0$, $\mu(t, x)$ — непрерывно дифференцируемая по t, x, периодичная по t с периодом 2π функция, P_0 и P^0 — постоянные.

В статье [1] были указаны достаточные условия, при которых дифференциальное уравнение (1) при $\mu(t, x) \equiv 1$ имеет ровно n периодических решений, каждое из которых асимптотически устойчиво при $t > 0$ либо при $t < 0$.

Аналогичный вопрос выясняется для уравнения (1) в предположении, что функция $\mu(t, x)$ не меняет знака.

Пусть, для определенности, $\mu(t, x) \geqslant \gamma_0 > 0$. Предположим, что

$$\left| \frac{\partial \mu(t, x)}{\partial t} \right| \leqslant \gamma_1 \text{ для } t \in \mathbf{R},\ P_0 \leqslant x \leqslant P^0.$$

Введем обозначения: $\delta_j = \max\limits_{t\in[0,2\pi]} |\dot{P}_j(t)|$, $P_j^- = \min\limits_{t\in[0,2\pi]} P_j(t)$, $P_j^+ = \max\limits_{t\in[0,2\pi]} P_j(t)$, $d_{jv} = |P_v^- - P_j^+|$ $(j, v = 1,^- n)$.

Докажем следующий результат.

Теорема. *Пусть правая часть уравнения* (1) 2π-*периодическая по* t, *непрерывно дифференцируемая функция и выполняются условия*

$$\gamma_0 \prod_{\substack{j=1\\ j\neq v}}^{n} d_{jv} > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq v}}^{n} \frac{\delta_j}{d_{jv}} + \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \quad (j, v = 1,^- n).$$

Тогда уравнение (1) *имеет ровно* n 2π-*периодических решений* $x = x_j(t)$ $(j = 1,^- n)$, *каждое из которых асимптотически устойчиво при* $t > 0$ *либо при* $t < 0$ *и лежит в полосе* $P_j^- < x < P_j^+$.

При доказательстве теоремы будем пользоваться принципом кольца и тем фактом, что периодические решения уравнения (1) асимптотически устойчивы при $t > 0$ либо при $t < 0$ [2, 3].

Пусть $x = x_v(t)$ — периодическое решение уравнения (1). Уравнение в вариациях, отвечающее этому решению, имеет, как известно, вид

$$\frac{d\delta x_v(t)}{dt} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\mu(t, x)\prod_{j=1}^{n}(x - P_j(t))\right]_{x=x_v(t)} \delta x_v(t).$$

При решении этого дифференциального уравнения получим выражение для вариации решения $x = x_v(t)$:

$$\delta x_v(t) = \exp\left\{\int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial x}\mu(t, x)\prod_{j=1}^{n}(x - P_j(t))\right]_{x=x_v(t)} dt\right\}.$$

Предположим, что периодические решения $x = x_v(t)$ удовлетворяют неравенствам $P_v^- \leqslant x_v \leqslant P_v^+$ $(v = 1,^- n)$. Рассмотрим интеграл

$$I_v = \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial x}\mu(t, x)\prod_{j=1}^{n}(x - P_j(t))\right]_{x=x_v(t)} dt.$$

Учитывая, что $x_v(t)$ — решение уравнения (1), для интеграла I_v получим выражение

$$I_v = \int_0^t \left[\frac{\partial\mu(t, x_v)}{\partial x}\prod_{j=1}^{n}(x_v - P_j(t)) + \mu(t, x_v)\prod_{j=1}^{n}(x - P_j(t)) \times \right.$$
$$\left. \times\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_v - P_j(t)}\right)\right] dt = \int_0^t \left[\frac{\partial\mu(t, x_v)}{\partial x}\prod_{j=1}^{n}(x_v - P_j(t)) + \mu(t, x_v) \times \right.$$
$$\left. \times \prod_{\substack{j=1\\ j\neq v}}^{n}(x_v - P_j(t)) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq v}}^{n}\frac{\dot{x}_v}{x_v - P_j(t)}\right] dt = \int_0^t \left[\frac{\partial\mu(t, x_v)}{\partial x}\prod_{j=1}^{n}(x_v - P_j(t)) + \right.$$

$$+\mu(t, x_v)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq v}}^{n}(x_v - P_j(t)) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq v}}^{n}\frac{\dot P_j(t)}{x_v - P_j(t)}\Bigg]dt + \ln\prod_{\substack{j=1\\ j\neq v}}^{n}(x_v - P_j(t)) =$$

$$= I'_v + \ln\prod_{\substack{j=1\\ j\neq v}}^{n}(x_v - P_j(t)).$$

Таким образом, вариация решения $x = x_v(t)$ определяется функцией

$$\delta x_v(t) = \exp\{I_v\} = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq v}}^{n}(x_v(t) - P_j(t))\exp\{I'_v\}.$$

Рассмотрим интеграл

$$I'_v = \int_0^t\Bigg[\frac{\partial\mu(t, x_v)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{1}{\mu(t, x_v)} + \frac{1}{\mu(t, x_v)}\frac{\partial\mu(t, x_v)}{\partial t} - \frac{1}{\mu(t, x_v)}\frac{\partial\mu(t, x_v)}{\partial t} +$$

$$+\mu(t, x_v)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq v}}^{n}(x_v - P_j(t)) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq v}}^{n}\frac{\dot P_j(t)}{x_v - P_j(t)}\Bigg]dt = \ln\mu(t, x_v) +$$

$$+\int_0^t\Bigg[\mu(t, x_v)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq v}}^{n}(x_v - P_j(t)) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq v}}^{n}\frac{\dot P_j(t)}{x_v - P_j(t)} - \frac{1}{\mu(t, x_v)}\frac{\partial\mu(t, x_v)}{\partial t}\Bigg]dt =$$

$$= \ln\mu(t, x_v) + I''_v.$$

Окончательно вариация принимает вид $\delta x_v(t) = \mu(t, x_v)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq v}}^{n}(x_v - P_j(t))\exp I''_v$.

Так как $|\dot P_j(t)| \leqslant \delta_j$, $|x_v - P_j(t)| \geqslant d_{jv}$ $(j, v = \overline{1, n})$, $\mu(t, x) \geqslant \gamma_0 > 0$, $\left|\frac{\partial\mu(t, x)}{\partial t}\right| \leqslant \gamma_1$, то интеграл I''_v оценится следующим образом:

$$\int_0^t\left|\mu(t, x_v)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq v}}^{n}(x_v - P_j(t)) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq v}}^{n}\frac{\dot P_j(t)}{x_v - P_j(t)} - \frac{1}{\mu(t, x_v)}\frac{\partial\mu(t, x_v)}{\partial t}\right|dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^t\Bigg[\mu(t, x_v)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq v}}^{n}|x_v - P_j(t)| - \frac{1}{\mu(t, x_v)}\left|\frac{\partial\mu(t, x_v)}{\partial t}\right| - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq v}}^{n}\frac{|\dot P_j(t)|}{|x_v - P_j(t)|}\Bigg]dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^t\Bigg[\gamma_0\prod_{\substack{j=1\\ j\neq v}}^{n}d_{jv} - \frac{\gamma_1}{\gamma_0} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq v}}^{n}\frac{\delta_j}{d_{jv}}\Bigg]dt.$$

Отсюда следует, что при выполнении условий

$$\gamma_0\prod_{\substack{j=1\\ j\neq v}}^{n}d_{jv} > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq v}}^{n}\frac{\delta_j}{d_{jv}} + \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \tag{2}$$

решение $x = x_v(t)$ дифференциального уравнения (1) неустойчиво при $t > 0$.

На прямых $x = P_v^-$ и $x = P_v^+$ векторное поле направлено в разные стороны. Этого достаточно, согласно принципу кольца, чтобы в зоне S_v, которая определяется неравенством $P_v^- < x(t) < P_v^+$, было хотя бы одно периодическое решение $x = x_v(t)$. При выполнении неравенства (2), это решение, как было показано, неустойчиво при $t > 0$.

Так как два последовательных периодических решения уравнения (1) должны иметь разную устойчивость [2], то в зоне S_v имеем лишь одно периодическое решение.

Так как вне зон S_v ($v = \overline{1, n}$) периодические решения находиться не могут и в каждой зоне находится лишь одно периодическое решение, и зон ровно n, то дифференциальное уравнение (1) имеет ровно n периодических решений, каждое из которых асимптотически устойчиво при $t > 0$ либо при $t < 0$, причем два последовательных решения имеют различную устойчивость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заваликут Г. Д. До питання про періодичні розв'язки одного диференціального рівняння з поліноміальною правою частиною.— Вісн. Київ. ун-ту. Математика, механіка, 1977, вип. 19, с. 140—142.
2. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений.— М.—Л.: Гостехиздат, 1949.— 552 с.
3. Плисс В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний.— М.—Л.: Наука, 1964.— 358 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
24.XII 1979 г.