УДК 517.9

В. Г. Коломиец

Некоторые замечания по поводу методов линеаризации в теории нелинейных колебаний

При исследовании нелинейных колебательных систем широкое распространение нашли методы линеаризации, позволяющие нелинейную систему приближенно заменять линейной.

Обычный метод линеаризации нелинейной характеристики заключается в замене ее линейной функцией. Так, если характеристика имеет вид $y = f(x)$, то ее приближенно заменяют линейной функцией $y = k_0 + k_1 x$, где k_0 и k_1 — постоянные, т. е. используют два первых слагаемых ее разложения в ряд Тейлора, и $k_0 = f(0)$, $k_1 = f'(0)$. Такая линеаризация не может быть осуществлена, если характеристика является существенно нелинейной, например релейной.

Другим методом линеаризации нелинейных характеристик (нелинейностей) является метод гармонической линеаризации. Сущность этого метода заключается в том, что при гармоническом изменении x, y приближенно считается гармоническим (первой гармоникой). Метод гармонической линеаризации может быть применен практически ко всем нелинейностям.

При исследовании случайных колебательных процессов в нелинейных системах применяется метод статистической линеаризации. В этом методе нелинейные характеристики приближенно заменяются эквивалентными линеаризованными характеристиками в статистическом смысле. Этот метод можно применять и для детерминированных систем.

Как известно [1—4], метод статистической линеаризации состоит в отыскании наилучшего способа приближения заданных истинных нелинейных функций с помощью аппроксимирующих линейных или заданного нелинейного преобразования линейным.

Наилучшим способом приближения является критерий минимума среднеквадратичного отклонения. Метод статистической линеаризации позволяет эффективно решать широкий круг задач теории нелинейных колебаний.

Наиболее распространенные нелинейные системы в теории колебаний такие, в которых нелинейности имеют вид $y = f(x)$, $y = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ и др. Так, для нелинейной функции $f(x)$ можно построить наилучшее линейное приближение

$$Y = k_0 + k_1 X, \qquad k_0 = \mathbf{M}\{f(X)\}, \qquad k_1 = \frac{\mathbf{M}\{f(X)X\}}{\mathbf{M}X^2}, \qquad \mathbf{M}X = 0. \quad (1)$$

Для нелинейной функции $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ —

$$Y = k_0 + k_1 X + k_2 \dot{X}, \qquad k_0 = \mathbf{M}\{f(X, \dot{X})\},$$

$$k_1 = \frac{\mathbf{M}\{f(X, \dot{X})X\}}{\mathbf{M}X^2}, \quad k_2 = \frac{\mathbf{M}\{f(X, \dot{X})\dot{X}\}}{\mathbf{M}\dot{X}^2}, \quad \mathbf{M}X = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{M}\dot{X} = 0, \quad \mathbf{M}X\dot{X} = 0,$$

где $\mathbf{M}$ обозначает операцию математического ожидания. Коэффициенты линеаризации k_0, k_1, k_2 определяются из условий минимума математического ожидания квадрата разности истинных нелинейных функций и их заменяющих аппроксимирующих линейных функций (среднеквадратичного отклонения):

$$\sigma^2 = \mathbf{M}\{[f(X) - k_0 - k_1 X]^2\} = \min, \quad (3)$$

$$\sigma^2 = \mathbf{M}\{[f(X, \dot{X}) - k_0 - k_1 X - k_2 \dot{X}]^2\} = \min.$$

Условия минимума среднеквадратичного отклонения можно записать в виде

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial k_0} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma^2}{\partial k_1} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma^2}{\partial k_2} = 0. \quad (4)$$

Метод статистической линеаризации можно применять для исследования нелинейных систем, используя методы теориии линейных дифференциальных уравнений.

В теории нелинейных систем широко используется метод гармонической линеаризации [5], основанный на методе эквивалентной линеаризации и принципе гармонического баланса, разработанных в трудах Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского [6]. В этом методе нелинейности в уравнениях заменяются специальными гармонически линеаризованными членами. Так, если $y = f(x)$ — нелинейная функция и переменная x изменяется по закону гармонических колебаний $x = a\cos\psi$, то

$$y = k_0 + k_1 a \cos\psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi)\, d\psi + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi)\cos\psi d\psi \cos\psi. \quad (5)$$

При синусоидальных колебаниях гармоническая линеаризация нелинейной функции $y = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ сводится к замене ее соотношением

$$y = k_0 + k_1 a\cos\psi - k_2 a\omega\sin\psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\, d\psi +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi d\psi\cos\psi + \tag{6}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi d\psi\sin\psi.$$

Здесь коэффициенты k_0, k_1 и k_2 являются коэффициентами Фурье соответствующих периодических функций. Аналогично может быть выполнена и линеаризация для нелинейных функций, зависящих от производных входных величин высшего порядка.

Если в (1) положить $x = a\cos(\omega t + \theta)$ и **M** оператор усреднения по времени (среднее значение), то (1) можно переписать в виде

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi)\,d\psi + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi)\cos\psi d\psi\cos(\omega t + \theta). \tag{7}$$

Правая часть (7) — сумма двух первых членов ряда Фурье функции $f(a\cos\psi)$. Для (2) имеем

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\,d\psi + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\times$$

$$\times\cos\psi d\psi\cos(\omega t + \theta) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi d\psi\sin(\omega t + \theta), \tag{8}$$

что является суммой первых трех членов ряда Фурье для функции $f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)$. Поэтому метод статистической гармонической линеаризации эквивалентный методу гармонической линеаризации в теории нелинейных колебаний. Метод гармонического баланса (гармонической линеаризации) можно интерпретировать как метод наилучшего приближения в смысле минимума среднеквадратичного отклонения. Среднее берется по времени за период гармонических колебаний.

Из сравнения полученных формул следует, что метод гармонической линеаризации вытекает из метода статистической линеаризации. Коэффициенты статистической линеаризации в (1), (2), (7), (8) представляют собой эквивалентные коэффициенты гармонической линеаризации при гармоническом изменении x.

Весьма часто в теории колебаний встречаются нелинейности такие, что первые интегралы в (7) и (8) равны нулю.

Как показано в работе [6], эквивалентная линеаризация квазилинейной системы соответствует первому приближению асимптотического метода нелинейной механики. Для этого необходимо нелинейность $\varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ заменить линейной вида $-\left[\omega_1^2 x + \lambda_э\frac{dx}{dt}\right]$.

Используя принцип гармонического баланса

$$\varepsilon\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi d\psi\sin\psi + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -\right.$$

$$\left.-a\omega\sin\psi)\cos\psi d\psi\cos\psi\right\} = -\omega_1^2 a\cos\psi + \lambda_э a\omega\sin\psi,$$

получаем

$$\omega_1^2(a) = -\frac{\varepsilon}{\pi a}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi d\psi,$$

$$\lambda_э(a) = \frac{\varepsilon}{\pi a\omega}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi d\psi. \qquad (9)$$

По методу статистической гармонической линеаризации получим такие же выражения, если в (2) подставить $k_1 = -\omega_1^2(a)$, $k_2 = -\lambda_э(a)$ и $x = a\cos\psi$.

Рассмотрим основное дифференциальное уравнение колебательной системы

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right). \qquad (10)$$

В первом приближении решение этого уравнения можно представить так:

$$x = a\cos\psi. \qquad (11)$$

Запишем уравнение (10) в виде [7]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda_э(a)\frac{dx}{dt} + (\omega^2 + \omega_1^2(a))\,x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \lambda_э(a)\frac{dx}{dt} + \omega_1^2(a)\,x. \qquad (12)$$

Неизвестные эквивалентные коэффициенты $\lambda_э(a)$ и $\omega_1^2(a)$ подбираются так, чтобы величина

$$\mathbf{M}\left[\varepsilon f\left(X, \frac{dX}{dt}\right) + \lambda_э(a)\frac{dX}{dt} + \omega_1^2(a)\,X\right]^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\varepsilon f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) - $$
$$-\lambda_э(a)\,a\omega\sin\psi + a\omega_1^2(a)\cos\psi]^2\,d\psi \qquad (13)$$

достигала минимума.

После простых вычислений получаем соотношения, совпадающие с (9).

Обозначим $\omega_э^2(a) = \omega^2 + \omega_1^2(a)$. В первом приближении колебания исходной нелинейной колебательной системы эквивалентны колебаниям линейной системы [6]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda_э(a)\frac{dx}{dt} + \omega_э^2(a)\,x = 0, \qquad (14)$$

если в (11) a и ψ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi d\psi,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega - \frac{\varepsilon}{2\pi a\omega}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi\,d\psi. \qquad (15)$$

Уравнение (15) можно переписать с помощью обозначений (9):

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\lambda_э(a)}{2}\,a, \qquad \frac{d\psi}{dt} = \omega_э(a). \qquad (16)$$

Очевидно, решение (11) уравнения (10) с точностью до величин порядка малости ε^2 является решением уравнения (14). Метод статистической гармонической линеаризации в этом случае приводит к таким же результатам, как метод эквивалентной линеаризации, метод гармонического баланса, метод гармонической линеаризации и первое приближение асимптотического метода Крылова — Боголюбова — Митропольского.

Следует отметить, что эквивалентная линейная система (14) отличается от обычной линейной системы зависимостью ее эквивалентных коэффициентов от амплитуды колебаний.

Все изложенное выше справедливо для нелинейных стохастических систем. Так, случайные колебания нелинейной системы

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \omega^2 X = \varepsilon f\left(X,\ \frac{dX}{dt}\right) + \xi(t), \tag{17}$$

где $\xi(t)$—стационарный случайный процесс с заданными математическим ожиданием и корреляционной функцией, в первом приближении эквивалентны случайным колебаниям линейной системы

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \lambda_э \frac{dX}{dt} + \omega_э^2 X = \xi(t). \tag{18}$$

Математические ожидания в (3) будут периодическими функциями времени в силу периодической зависимости от времени решения. Поэтому статистические эквивалентные коэффициенты $\lambda_э$ и $\omega_э^2 = \omega^2 + \omega_1^2$ следует выбирать из условия минимума усредненного за период математического ожидания квадрата разности истинной и линеаризованной функций

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathbf{M}\left[\varepsilon f\left(X, \frac{dX}{dt}\right) + \lambda_э \frac{dX}{dt} + \omega_1^2 X\right]^2 d\psi, \tag{19}$$

где X имеет вид (11).

Чтобы найти точно $\lambda_э$ и ω_1^2 из (19), необходимо знание плотности распределения вероятностей для амплитуды нелинейных колебаний, являющейся неизвестной. В первом приближении, однако, можно использовать распределение Релея.

Условием применимости метода гармонической линеаризации для нелинейных дифференциальных уравнений является условие существования периодического решения, близкого к синусоидальному.

Метод статистической эквивалентной гармонической линеаризации можно считать обобщением метода Крылова — Боголюбова — Митропольского, успешно применяемого в детерминированной теории нелинейных колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пугачев В. С. Теория случайных процессов и ее применение к задачам автоматического управления.— М. : Физматгиз, 1960.— 883 с.
2. Казаков И. Е., Доступов Б. Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем.— М.: Физматгиз, 1962.— 332 с.
3. Первозванский А. А. Случайные процессы в нелинейных автоматических системах.— М.: Физматгиз, 1962.— 351 с.
4. Лившиц Н. А., Пугачев В. Н. Вероятностный анализ систем автоматического управления. В 2-х томах.— М.: Советское радио, 1963.— Т. 2. 483 с.
5. Попов Е. П., Пальтов Н. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем.— М.: Физматгиз, 1960.— 792 с.
6. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.— 501 с.
7. Случайные колебания /Под. ред. С. Кренделла.— М.: Мир, 1967.— 356 с.
8. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике.— К.: Наук. думка, 1971.— 440 с.
9. Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике.— М.: Госстройиздат, 1965.— 278 с.

10. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций.— М.: Наука, 1968.— 463 с.
11. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения.— Киев: Наук. думка, 1968.— 354 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
10.V 1979 г.