УДК 518:517.948

Н. С. Курпель, Ф. М. Мигович

Двусторонние проекционно-итеративные аналоги метода Пиконе

Для приближенного решения нелинейных интегральных уравнений в работах [1, 2] предложены и исследованы алгоритмы, которые при определенных условиях сходятся быстрее, чем обычный метод последовательных приближений. В статье [3] с помощью некоторых модификаций алгоритмов М. Пиконе [1, 2, 4] построены и исследованы двусторонние процессы последовательных приближений, которые монотонно снизу и сверху сходятся к решениям операторных уравнений в полуупорядоченных банаховых пространствах.

Настоящая статья посвящена исследованию двусторонних процессов последовательных приближений, представляющих собой проекционно-итеративные аналоги модификаций алгоритма М. Пиконе, рассмотренных в [3]. Заметим, что для уравнений в общих банаховых пространствах проекционно-итеративный аналог метода М. Пиконе рассмотрен в работе [5].

1. Пусть дано нелинейное операторное уравнение

$$x = f + B(x, x)\,x, \tag{1}$$

где $B(u, v)$ при фиксированных u, v, принадлежащих некоторому полуупорядоченному банаховому пространству E,— линейный оператор, действующий из E в E; f, x — соответственно известный и искомый элементы пространства E.

Предположим, что известны элементы $u_0, v_0 \in E$ $(0 \leqslant u_0 \leqslant v_0)$, такие, что выполняются неравенства

$$u_0 \leqslant f + B(u_0, v_0)\,u_0, \qquad v_0 \geqslant f + B(v_0, u_0)\,v_0 \tag{2}$$

и при всех $u, v \in D_0$, $D_0 = [u_0, v_0]$, оператор $B(u, v)$ обладает свойствами

$$B(u, v) \geqslant 0, \tag{3}$$

$$B(u, v) \leqslant B(\bar{u}, \bar{v}) \text{ при } u \leqslant \bar{u},\ v \geqslant \bar{v}, \tag{4}$$

причем спектральный радиус $\rho(B(u, v))$ оператора $B(u, v)$ меньше единицы. Пусть P — проекционный оператор ($P = P^2$), проектирующий исходное пространство E на некоторое его подпространство E_P и обладающий свойством $P \geqslant 0$, $Q = I - P \geqslant 0$, I — тождественный оператор, причем $\rho(PB(u, v)) < 1$, $\rho(B(u, v)\,P) < 1$.

Согласно рассматриваемым проекционно-итеративным методам определим последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ соответственно нижних и верхних приближений как решения уравнений

$$\begin{aligned} u_n &= f + PB(u_{n-1}, v_{n-1})\,u_n + QB(u_{n-1}, v_{n-1})\,u_{n-1}, \\ v_n &= f + PB(v_{n-1}, u_{n-1})\,v_n + QB(v_{n-1}, u_{n-1})\,v_{n-1} \end{aligned} \tag{5}$$

и

$$u_n = f + B(u_{n-1}, v_{n-1})(Pu_n + Qu_{n-1}), \qquad v_n = f + B(v_{n-1}, u_{n-1})(Pv_n + Qv_{n-1}), \tag{6}$$

взяв в качестве начальных приближений элементы u_0, v_0.

Теорема 1. *При указанных предположениях последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$, определяемые согласно алгоритмам* (5) *и* (6), *удовлетворяют неравенствам*

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant x^* \leqslant v_n \leqslant \ldots \leqslant v_1 \leqslant v_0, \tag{7}$$

где x^* — любое принадлежащее D_0 решение уравнения (1).

Доказательство. Так как $\rho(PB(u, v)) < 1$, $\rho(B(u, v)P) < 1$ при всех $u, v \in D_0$, то последовательные приближения u_n, v_n определяются согласно алгоритмам (5) и (6) однозначно. При $n = 1$ из (5) и (2), (6) и (2) получаем соответственно

$$u_1 - u_0 \geqslant PB(u_0, v_0)(u_1 - u_0), \quad v_0 - v_1 \geqslant PB(v_0, u_0)(v_0 - v_1)$$

и

$$u_1 - u_0 \geqslant B(u_0, v_0)P(u_1 - u_0), \quad v_0 - v_1 \geqslant B(v_0, u_0)P(v_0 - v_1).$$

Следовательно, $u_1 - u_0 \geqslant 0$, $v_0 - v_1 \geqslant 0$, т. е. $u_0 \leqslant u_1$, $v_1 \leqslant v_0$. Из (5) и (6) имеем также $v_1 - u_1 \geqslant PB(v_0, u_0)v_1 - PB(u_0, v_0)u_1 \geqslant PB(v_0, u_0)(v_1 - u_1)$ и $v_1 - u_1 \geqslant B(v_0, u_0)Pv_1 - B(u_0, v_0)Pu_1 \geqslant B(v_0, u_0)P(v_1 - u_1)$, откуда $v_1 - u_1 \geqslant 0$, т. е. $u_1 \leqslant v_1$. Таким образом, имеем $u_0 \leqslant u_1 \leqslant v_1 \leqslant v_0$. Далее, из (5) и (6) находим соответственно

$$u_1 = f + PB(u_0, v_0)u_1 + QB(u_0, v_0)u_0 \leqslant f + PB(u_1, v_1)u_1 + QB(u_1, v_1)u_1 =$$
$$= f + B(u_1, v_1)u_1, \qquad v_1 = f + PB(v_0, u_0)v_1 + QB(v_0, u_0)v_0 \geqslant$$
$$\geqslant f + PB(v_1, u_1)v_1 + QB(v_1, u_1)v_1 = f + B(v_1, u_1)v_1$$

и

$$u_1 = f + B(u_0, v_0)Pu_1 + B(u_0, v_0)Qu_0 \leqslant f + B(u_1, v_1)Pu_1 + B(u_1, v_1)Qu_1 =$$
$$= f + B(u_1, v_1)u_1, \qquad v_1 = f + B(v_0, u_0)Pv_1 + B(v_0, u_0)Qv_0 \geqslant$$
$$\geqslant f + B(v_1, u_1)Pv_1 + B(v_1, u_1)Qv_1 = f + B(v_1, u_1)v_1,$$

т. е. элементы u_1, v_1 удовлетворяют тем же соотношениям (2), что и элементы u_0, v_0. Принимая u_1, v_1 за исходные приближения, аналогично предыдущему докажем соотношения $u_1 \leqslant u_2 \leqslant v_2 \leqslant v_1$ и т. д. и, вообще, соотношения

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n. \tag{8}$$

Если x^* — принадлежащее отрезку $D_0 = [u_0, v_0]$ решение уравнения (1), то имеем, очевидно,

$$x^* = f + PB(x^*, x^*)x^* + QB(x^*, x^*)x^* \tag{9}$$

и

$$x^* = f + B(x^*, x^*)Px^* + B(x^*, x^*)Qx^*. \tag{10}$$

Вычитая (5) из (9) и (10) из (6), при $n = 1$ находим в силу свойств операторов P, Q, $B(u, v)$ соответственно

$$x^* - u_1 \geqslant PB(u_0, v_0)(x^* - u_1) + QB(u_0, v_0)(x^* - u_1) = B(u_0, v_0)(x^* - u_1),$$
$$v_1 - x^* \geqslant PB(v_0, u_0)(v_1 - x^*) + QB(v_0, u_0)(v_1 - x^*) = B(v_0, u_0)(v_1 - x^*)$$

и

$$x^* - u_1 \geqslant B(u_0, v_0)[P(x^* - u_1) + Q(x^* - u_1)] = B(u_0, v_0)(x^* - u_1),$$
$$v_1 - x^* \geqslant B(v_0, u_0)[P(v_1 - x^*) + Q(v_1 - x^*)] = B(v_0, u_0)(v_1 - x^*),$$

откуда как в случае алгоритма (5), так и в случае алгоритма (6) имеем $u_1 \leqslant x^* \leqslant v_1$.

Аналогично доказываем соотношение $u_2 \leqslant x^* \leqslant v_2$ и по индукции соотношение (7) для любого $n = 1, 2, \ldots$ Теорема доказана.

Заметим, что в отличие от алгоритма работы [4], где для нахождения последовательных приближений u_n, v_n необходимо решать линейные операторные уравнения в исходном пространстве E, в случае алгоритмов (5) и (6) последовательные приближения определяются из уравнений, которые сводятся к уравнениям в подпространстве E_P. Решение их во многих важных случаях представляют собой более простую задачу, чем решение уравнений в пространстве E. Если, например, пространство E_P конечномерно размерности m, то определение приближений u_n, v_n сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений порядка m. В случае, когда $P = 0$, алгоритмы (5) и (6) переходят в обычный двусторонний итеративный метод, определяемый рекуррентными формулами

$$\tilde{u}_n = f + B(\tilde{u}_{n-1}, \tilde{u}_{n-1})\tilde{u}_{n-1}, \qquad \tilde{u}_n = f + B(\tilde{v}_{n-1}, \tilde{u}_{n-1})\tilde{v}_{n-1}, \tag{11}$$

а в случае $P = 1$ — в двусторонний алгоритм из работы [4], применяемый к уравнению (1), т. е. в алгоритм вида

$$\bar{u}_n = f + B(\bar{u}_{n-1}, \bar{v}_{n-1})\bar{u}_n, \qquad \bar{v}_n = f + B(\bar{v}_{n-1}, \bar{u}_{n-1})\bar{v}_n. \tag{12}$$

Используя свойства операторов P, Q и $B(u, v)$, легко показать, что если $\tilde{u}_0 = u_0 = \bar{u}_0$, $\tilde{v}_0 = v_0 = \bar{v}_0$, то при любом n имеют место соотношения

$$\tilde{u}_n \leqslant u_n \leqslant \bar{u}_n \leqslant \bar{v}_n \leqslant v_n \leqslant \tilde{v}_n, \tag{13}$$

где $\tilde{u}_n$, $\tilde{v}_n$ и $\bar{u}_n$, $\bar{v}_n$ определяются соответственно согласно (11) и (12), а u_n, v_n согласно (5) или (6).

2. Рассмотрим вопрос о сходимости и скорости сходимости последовательностей $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, определяемых согласно (5) и (6), к решению уравнения (1).

Теорема 2. *Пусть норма в пространстве E монотонна и выполняются условия:*

$$\| PB(v_0, u_0)\| \leqslant p, \qquad \| QB(v_0, u_0)\| \leqslant q; \tag{14}$$

$$\| PB(v, u) - PB(u, v)\| \leqslant l_P \| v - u\|, \qquad \| QB(v, u) - QB(u, v)\| \leqslant l_Q \| v - u\| \tag{15}$$

$$(u \leqslant v),$$

$$p + q + (l_P + l_Q)\| v_0\| < 1. \tag{16}$$

Тогда последовательность $\Delta_n = v_n - u_n$, где u_n, v_n определяются согласно (5), *сходится к нулю и справедлива оценка*

$$\| \Delta_n \| \leqslant \varepsilon^{n-\nu}\| \Delta_\nu \|, \tag{17}$$

где $\varepsilon = \dfrac{q + (l_P + l_Q)\| v_0\|}{1 - p}$.

Доказательство. Из равенств (5) находим

$$v_n - u_n = PB(v_{n-1}, u_{n-1})(v_n - u_n) + [PB(v_{n-1}, u_{n-1}) - PB(u_{n-1}, v_{n-1})]u_n +$$
$$+ QB(v_{n-1}, u_{n-1})(v_{n-1} - u_{n-1}) + [QB(v_{n-1}, u_{n-1}) - QB(u_{n-1}, v_{n-1})]u_{n-1}, \tag{18}$$

откуда в силу (14), (15) и свойств операторов P, Q, $B(x, y)$ имеем

$$\| \Delta_n \| \leqslant P\| \Delta_n \| + l_P \| v_0\| \, \| \Delta_{n-1}\| + q\| \Delta_{n-1}\| + l_Q \| v_0\| \, \| \Delta_{n-1}\|$$

$$\text{и } \| \Delta_n \| \leqslant \varepsilon \| \Delta_{n-1}\|. \tag{19}$$

Поскольку согласно (16) $\varepsilon < 1$, то последовательность $\| \Delta_n \|$ сходится к нулю. Неравенство (17) непосредственно следует из (19). Теорема доказана.

Замечание 1. Для алгоритма (6) теорема 2 справедлива с тем отличием, что в неравенствах (14) и (15) вместо операторов $PB(x, y)$ и $QB(x, y)$ следует взять операторы $B(x, y)P$ и $B(x, y)Q$.

Замечание 2. Так как имеют место неравенства (7), то в силу монотонности нормы имеем $\| x^* - u_n \| \leqslant \| \Delta_n \|$, $\| v_n - x^* \| \leqslant \| \Delta_n \|$ и условия теоремы 2 обеспечивают единственность решения уравнения (1). Факт существования решения уравнения (1) можно установить, например, воспользовавшись принципом Шаудера. Для этого достаточно предположить, что оператор в правой части уравнения (1) вполне непрерывен.

3. Рассмотрим алгоритм (5) в случае гильбертова пространства и оператора ортогонального проектирования P. Используя свойство [6]

$$\| Px + Qy \|^2 = \| Px \|^2 + \| Qy \|^2, \tag{20}$$

имеем в теореме 2 вместо (16) менее ограничительное условие

$$(p + l_P \| v_0 \|)^2 + (q + l_Q \| v_0 \|)^2 < 1 \tag{21}$$

для сходимости алгоритма (5). При этом ε в оценке погрешности (17) заменяется величиной

$$\varepsilon_1 = \frac{pl_P \| v_0 \| + \sqrt{l_P^2 \| v_0 \|^2 + (q + l_Q \| v_0 \|)^2 (1 - p^2)}}{1 - p^2}.$$

Действительно, из (18) на основании (20) получаем $\| \Delta_n \|^2 \leqslant (p \| \Delta_n \| + l_P \| \Delta_{n-1} \| \, \| v_0 \|)^2 + (q + l_Q \| v_0 \|) \| \Delta_{n-1} \|^2$, откуда

$$\| \Delta_n \| \leqslant \frac{pl_P \| v_0 \| + \sqrt{l_P^2 \| v_0 \|^2 + (q + l_Q \| v_0 \|)^2 (1 - p^2)}}{1 - p^2} \| \Delta_{n-1} \| = \varepsilon_1 \| \Delta_{n-1} \|.$$

Несложными преобразованиями проверяется, что при условии (21) $\varepsilon_1 < 1$ и $\varepsilon_1 < \varepsilon$, определенного в теореме 2.

4. В случае, когда уравнение (1) рассматривается в банаховом пространстве с m-нормой [6], при условиях теоремы 2 получаем более точную оценку погрешности. В формуле (17) ε заменяется на $\varepsilon_2 = \max \left\{ \frac{l_P \| v_0 \|}{1 - p}, q + l_P \| v_0 \| \right\}$.

Действительно, используя свойство оператора проектирования P, определяемого равенством $Px = \{x_1, x_2, \ldots, x_N, 0, \ldots, 0\}$, что $\| Px + Qy \| = \max \{ \| Px \|, \| Qy \| \}$, из (18) получаем $\| \Delta_n \| \leqslant \max \{ p \| \Delta_n \| + l_P \| v_0 \| \, \| \Delta_{n-1} \|, (q + l_Q \| v_0 \|) \| \Delta_{n-1} \| \}$. Отсюда $\| \Delta_n \| \leqslant \varepsilon_2 \| \Delta_{n-1} \|$. Поскольку из (16) получаем, что $\varepsilon_2 < 1$, то последовательность $\| \Delta_n \|$ сходится к нулю и имеет место оценка погрешности (17), где $\varepsilon = \varepsilon_2$.

5. Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$x_i = f_i + \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{j=1}^{5} \frac{x_i}{24 + 4^{j-1} x_j^2} \right) x_i,$$

где $f_i = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2} \right)^{i-1} \right] \left(\frac{1}{2} \right)^{i-1}$ ($i = 1, 2, \ldots, 5$), имеющую точное решение $x = (1;\ 0{,}5;\ 0{,}25;\ 0{,}125;\ 0{,}0625)$. Взяв в качестве проекционного оператора P оператор, заданный соотношением $Px = (x_1, x_2, x_3, x_4, 0)$, который на множестве неотрицательных чисел обладает свойствами $P \geqslant 0$, $Q = 1 -$

$-P \geqslant 0$, согласно (5) имеем следующий алгоритм решения этой системы:

$$u_{i,n} = f_i + \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{j=1}^{5} \frac{u_{i,n-1}}{24 + 4^{j-1}v_{j,n-1}^2}\right)u_{i,n} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

$$u_{5,n} = f_i + \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{j=1}^{5} \frac{u_{i,n-1}}{24 + 4^{j-1}v_{j,n-1}^2}\right)u_{5,n-1},$$

$$v_{i,n} = f_i + \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{j=1}^{5} \frac{v_{i,n-1}}{24 + 4^{j-1}u_{j,n-1}^2}\right)v_{i,n} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

$$v_{5,n} = f_5 + \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{j=1}^{5} \frac{v_{5,n-1}}{24 + 4^{j-1}u_{j,n-1}^2}\right)v_{5,n-1}.$$

Исходя из начальных приближений $u_0 = (0, 0, 0, 0, 0)$; $v_0 = (2; 2; 2; 1; 0{,}25)$, удовлетворяющих условию (2), выполнив расчеты на ЭВМ «Мир-2», для 12-го приближения получаем $u_{12} = (0, 9999835; 0{,}4999976; 0{,}2499995; 0{,}1249999; 0{,}0624798)$, $v_{12} = (1, 0000053; 0{,}5000007; 0{,}2500001; 0{,}1250000; 0{,}0625665)$.

Если положить в (5) $P = 1$, то эту же точность получим в 9-м приближении: $\overline{u}_9 = (0{,}9999958; 0{,}4999999; 0{,}2499999; 0{,}1250000; 0{,}0625000)$, $\overline{v}_9 = (1{,}0000070; 0{,}5000000; 0{,}2500000; 0{,}1250000; 0{,}0625000)$.

При решении этой системы обычным методом последовательных приближений, исходя из начального приближения $x_0 = (0, 0, 0, 0, 0)$, для достижения этой же точности потребовалось 26 приближений: $x_{26} = (0{,}9999424; 0{,}4999995; 0{,}2499999; 0{,}1250000; 0{,}0624999)$. Такое же количество приближений потребовалось, если в качестве начального приближения было взято $x_0 = (2; 2; 2; 1; 0{,}25)$: $x_{26} = (1{,}0000559; 0{,}5000028; 0{,}2500004; 0{,}1250000; 0{,}0624999)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Picone M. Sull'equazione nonlineare di seconda specie di Fredholm, Math. Zeitschr., 1960, 74, N 2, p. 119—128.
2. Picone M. Sull'equazone integrale non lineare di Volterra. Ann. Mat. pura ed aplic., 1960, 49, N 1, p. 1—10.
3. Курпель Н. С., Тивончук В. И. Построение монотонных процессов последовательных приближений с помощью модификаций алгоритма М. Пиконе.— Изв. вузов. Математика, 1977, № 6, с. 126—130.
4. Kwapisz M. On a certain method of successive approximation, Colloquium Math., 1967, 16, p. 147—162.
5. Курпель М. С., Миговuч Ф. М. Наближене розв'язування проекційно-ітеративним методом деяких нелінійних операторних рівнянь.— ДАН УРСР. Сер. А, 1968, № 1, с. 13—16.
6. Курпель Н. С. Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений.— К.: Наук. думка, 1968.

Институт математики АН УССР
Тернопольский
финансово-экономический институт

Поступила в редакцию 11.VIII 1978 г.;
после переработки — 20.III 1980 г.