УДК 517.926.45

В. Н. Лаптинский

Об одном приближенном методе в теории колебаний

В этой заметке предлагается способ вывода алгоритмов построения периодических решений дифференциальных уравнений. Как и алгоритмы, доставляемые методом А. М. Самойленко (см. [1]), полученные ниже алгоритмы являются итерационными, однако для их вывода применен иной способ.

Во избежание громоздких выкладок ограничимся рассмотрением уравнений первого порядка. Здесь следует отметить, что приемы, составляющие суть предлагаемого ниже подхода, применимы при исследовании краевых задач (не только периодических) для функционально-дифференциальных уравнений, интегро-дифференциальных уравнений, а также для некоторых классов уравнений в частных производных (см. [2, гл. 4)]. То есть предложенный подход обладает некоторыми чертами универсальности, присущей методу А. М. Самойленко.

Сначала рассмотрим уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = A_1(t)\,x + A_2(t)\,x + f(t), \tag{1}$$

где x, $f(t)$ — n-мерные векторы, $A_1(t)$, $A_2(t)$ — $n\times n$-матрицы; $A_1(t)$, $A_2(t)$, $f(t)$ непрерывны и периодичны по t с периодом $\omega > 0$.

Известно (см., например, [3, с. 40]), что если уравнение $\frac{dy}{dt} = A_1(t)\,y$ некритическое относительно ω, то ω-периодическая краевая задача для уравнения (1) эквивалентна интегральному уравнению $x(t) = \int\limits_0^\omega G(t,\tau)\,A_2(\tau)\times$ $\times\, x(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^\omega G(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau$, где $G(t,\tau)$ — матрица Грина укороченного уравнения.

Пусть фундаментальная матрица $Y(t)$, $Y(0) = E$ (E — единичная матрица) ω-периодична. Тогда задача об ω-периодических решениях уравнения (1) сводится к нахождению таких его решений, для которых

$$\int\limits_0^\omega Y^{-1}(\tau)\,A_2(\tau)\,x(\tau)\,d\tau = -\int\limits_0^\omega Y^{-1}(\tau)\,f(\tau)\,d\tau. \tag{2}$$

Применим к уравнению (2) регуляризующий прием, основанный на формуле Коши для уравнения (1):

$$x(\tau) = Y(\tau)\,Y^{-1}(t)\,x(t) + Y(\tau)\int\limits_t^\tau Y^{-1}(\sigma)\,[A_2(\sigma)\,x(\sigma) + f(\sigma)]\,d\sigma. \tag{3}$$

Заметим, что при $A_1(t) \equiv 0$ формулу (3) можно рассматривать как формулу Тейлора вида $x(\tau) = x(t) + \int\limits_t^\tau (dx/d\sigma)\,d\sigma$, в которой производная $dx/d\sigma$ вычислена в силу уравнения (1).

Выполнив элементарные выкладки, получим из (2)

$$B(\omega)Y^{-1}(t)x(t)=\int_0^{\omega}C(\tau)\,d\tau\int_{\tau}^{t}Y^{-1}(\sigma)A_2(\sigma)x(\sigma)\,d\sigma+\int_0^{\omega}C(\tau)\,d\tau\times$$
$$\times\int_{\tau}^{t}Y^{-1}(\sigma)f(\sigma)\,d\sigma-\int_0^{\omega}Y^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

где $C(t)=Y^{-1}(t)A_2(t)Y(t),\quad B(t)=\int_0^t C(\tau)\,d\tau.$

Если $\det B(\omega)\neq 0$, то отсюда придем к интегральному уравнению

$$x(t)=Y(t)B^{-1}(\omega)\int_0^{\omega}C(\tau)\,d\tau\int_{\tau}^{t}Y^{-1}(\sigma)A_2(\sigma)x(\sigma)\,d\sigma+g(t),\tag{4}$$

где $g(t)=Y(t)B^{-1}(\omega)\left[\int_0^{\omega}C(\tau)\,d\tau\int_{\tau}^{t}Y^{-1}(\sigma)f(\sigma)\,d\sigma-\int_0^{\omega}Y^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau\right].$

Очевидно, уравнение (4) эквивалентно ω-периодической краевой задаче для уравнения (1) в рассматриваемом случае, в чем можно убедиться и непосредственной проверкой.

Выясним связь предложенного подхода с подходом из [4]. Для этого, введя при $A_2(t)$ скалярный параметр $\lambda\neq 0$, рассмотрим уравнение

$$x(t,\lambda)=Y(t)x(0,\lambda)+\lambda Y(t)\int_0^t Y^{-1}(\tau)A_2(\tau)x(\tau,\lambda)\,d\tau+Y(t)\int_0^t Y^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau.\tag{5}$$

Согласно [4] ω-периодическое решение $x(t,\lambda)$ ищется в виде ряда

$$x(t,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k-1}x_{k-1}(t).\tag{6}$$

Выполняя формальную процедуру подстановки (6) в (5), получим стандартным образом $x_{-1}(t)=Y(t)x_{-1}(0)$, $x_0(t)=Y(t)x_0(0)+Y(t)\int_0^t C(\tau)\,d\tau x_{-1}(0)+$ $+Y(t)\int_0^t Y^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau$, $x_{m+1}(t)=Y(t)x_{m+1}(0)+Y(t)\int_0^t Y^{-1}(\tau)A_2(\tau)x_m(\tau)\,d\tau$, $m=0, 1, 2, \ldots$ Далее последовательно находим постоянные $x_{k-1}(0)$, $k=0, 1, 2, \ldots$, соответствующие искомому ω-периодическому решению, а затем и вектор-функции $x_{k-1}(t)$:

$$x_{-1}(t)=-Y(t)B^{-1}(\omega)\int_0^{\omega}Y^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau,\quad x_0(t)=-Y(t)B^{-1}(\omega)\times$$
$$\times\left[\int_0^{\omega}C(\tau)\,d\tau\int_0^{\tau}Y^{-1}(\sigma)A_2(\sigma)x_{-1}(\sigma)\,d\sigma+\int_0^{\omega}C(\tau)\,d\tau\int_0^{\tau}Y^{-1}(\sigma)f(\sigma)\,d\sigma\right]+$$
$$+Y(t)\int_0^t Y^{-1}(\sigma)A_2(\sigma)x_{-1}(\sigma)\,d\sigma+Y(t)\int_0^t Y^{-1}(\sigma)f(\sigma)\,d\sigma,$$

$$x_{m+1}(t)=-Y(t)B^{-1}(\omega)\int_0^{\omega}C(\tau)\,d\tau\int_0^{\tau}Y^{-1}(\sigma)A_2(\sigma)x_m(\sigma)\,d\sigma+Y(t)\times$$
$$\times\int_0 Y^{-1}(\tau)A_2(\tau)x_m(\tau)\,d\tau.$$

Используя очевидную формулу $\int\limits_0^{\tau} Y^{-1}(\sigma) A_2(\sigma) x_m(\sigma)\,d\sigma = \int\limits_0^{t} Y^{-1}(\sigma) A_2(\sigma) \times$ $\times x_m(\sigma)\,d\sigma + \int\limits_t^{\tau} Y^{-1}(\sigma) A_2(\sigma) x_m(\sigma)\,d\sigma$, получим окончательно

$$x_0(t) = Y(t) B^{-1}(\omega) \left[\int\limits_0^{\omega} C(\tau)\,d\tau \int\limits_{\tau}^{t} Y^{-1}(\sigma) A_2(\sigma) x_{-1}(\sigma)\,d\sigma + \int\limits_0^{\omega} C(\tau)\,d\tau \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{\tau}^{t} Y^{-1}(\sigma) f(\sigma)\,d\sigma \right], \quad x_{m+1}(t) = Y(t) B^{-1}(\omega) \int\limits_0^{\omega} C(\tau)\,d\tau \int\limits_{\tau}^{t} Y^{-1}(\sigma) A_2(\sigma) x_m(\sigma)\,d\sigma. \tag{7}$$

Нетрудно заметить, что к этим формулам придем, если в уравнение (4) ввести параметр при матрице $A_2(t)$, а затем искать решение этого уравнения в виде ряда (6).

Если к уравнению (4) применить метод итераций $x_r(t) = Y(t) B^{-1}(\omega) \times$ $\times \int\limits_0^{\omega} C(\tau)\,d\tau \int\limits_{\tau}^{t} Y^{-1}(\sigma) A_2(\sigma) x_{r-1}(\sigma)\,d\sigma + g(t)$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, принимая за начальное приближение $x_{-1}(t)$ вектор-функцию—$Y(t) B^{-1}(\omega) \int\limits_0^{\omega} Y^{-1}(\tau) f(\tau)\,d\tau$, то получим приближенные решения, имеющие вид частичных сумм ряда (6), вычисленных при $\lambda = 1$.

Докажем равномерную по t сходимость ряда (6), для чего введем необходимые обозначения: $|B^{-1}(\omega)| = \gamma$, $|Y(t)| \leqslant a$, $|Y^{-1}(t)| \leqslant b$, $|A_2(t) \leqslant \alpha$, $|f(t)| \leqslant h$; $a, b, \alpha, h = \text{const}$, $t \in [0, \omega]$, $\|x(t)\| = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant \omega} |x(t)|$, где через $|\ldots|$ обозначена любая подходящая норма в R^n.

Оценка нормы $x_0(t)$ имеет вид $\|x_0(t)\| \leqslant \frac{\gamma\alpha(ab\omega)^2}{2}(\alpha\|x_{-1}(t)\| + h)$. Далее из (7) нетрудно получить оценку рекуррентного типа: $\|x_{m+1}(t)\| \leqslant$ $\leqslant \frac{\gamma\delta^2}{2}\|x_m(t)\|$, где $\delta = \alpha ab\omega$.

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 1. *При выполнении условий* $\det B(\omega) \neq 0$, $\gamma\delta^2 < 2$ *ω-периодическое решение уравнения* (1) *существует, оно единственно и представимо в виде ряда* (6), *в котором следует положить* $\lambda = 1$.

Вопрос существования нами решен; единственность нетрудно доказать методом от противного, исходя из уравнения (4).

Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x), \tag{8}$$

в котором вектор-функция $f(t, x)$ определена и непрерывна по совокупности переменных в области $D = \{t, x : |t| < \infty, |x| \leqslant \rho\}$, удовлетворяет в D условию Липшица (относительно x) в постоянной L, причем $f(t, 0) \not\equiv 0$. Предполагается, что правая часть в (8) ω-периодична по t. Будем использовать введенные выше постоянные α, γ, полагая $A_1(t) \equiv 0$, $A_2(t) \equiv A(t)$.

Теорема 2. *Уравнение* (8) *будет иметь единственное в шаре* $\|x\| \leqslant$ $\leqslant \rho$ *ω-периодическое решение, если* $\det B(\omega) \neq 0$, $q < 1$, $\frac{\gamma\omega M_0(2 + \alpha\omega)}{2(1 - q)} \leqslant \rho$, *где* $M_0 = \|f(t, 0)\|$, $q = \frac{\gamma\alpha^2\omega^2}{2} + \frac{\gamma\alpha L\omega^2}{2} + \gamma L\omega$.

Доказательство. В самом деле, нетрудно проверить, что ω-периодическая краевая задача для уравнения (8) эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t) = B^{-1}(\omega)\int_0^{\omega} A(\tau)\, d\tau \int_{\tau}^{t} A(\sigma)\, x(\sigma)\, d\sigma + B^{-1}(\omega)\int_0^{\omega} A(\tau)\, d\tau \int_{\tau}^{t} f(\sigma, x(\sigma))\, d\sigma -$$

$$- B^{-1}(\omega)\int_0^{\omega} f(\tau, x(\tau))\, d\tau.$$

Условия теоремы позволяют применить к этому уравнению принцип сжатых отображений (см., например, [5, с. 605]). Соответствующие оценки выводим по изложенной выше схеме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самойленко А. М., Ронто Н. И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений.— Киев.: Вища школа, 1976.— 179 с.
2. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М.: Мир, 1972.— 588 с.
3. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах.— М.: Мир, 1966.— 230 с.
4. Лаптинский В. Н. Об одном алгоритме построения периодических решений линейных систем второго порядка.— Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1978, № 3, с. с. 113—116.
5. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1977.— 742 с.

Могилевское отделение
Института физики АН БССР

Поступила в редакцию
13.VI 1979 г.