УДК 517.9.

Ю. Л. Майстренко

Об асимптотически периодических решениях дифференциально-разностных уравнений

Настоящая заметка развивает исследования, начатые в работах [1—4]. Рассматривается квазилинейное дифференциально-разностное уравнение

$$P_\varepsilon(x(t), x(t+1))\dot{x}(t) + Q_\varepsilon(x(t), x(t+1))\dot{x}(t+1) + R_\varepsilon(x(t), x(t+1)) = 0 \tag{1}$$

в предположении, что при $\varepsilon = 0$ оно вполне интегрируемо [5], т. е., что коэффициенты $P_0(x, y)$, $Q_0(x, y)$, $R_0(x, y)$ уравнения

$$P_0(x(t), x(t+1))\dot{x}(t) + Q_0(x(t), x(t+1))\dot{x}(t+1) + R_0(x(t), x(t+1)) = 0 \tag{2}$$

удовлетворяют условию $R_0\left(\frac{\partial P_0}{\partial y} - \frac{\partial Q_0}{\partial x}\right) = P_0\frac{\partial R_0}{\partial y} - Q_0\frac{\partial R_0}{\partial x}$. Приводятся достаточные условия существования у уравнения (1) непрерывных ограниченных решений, приближающихся при $t \to \infty$ к 2-периодическим разрывным функциям.

В работах [1, 2] показано, что для вполне интегрируемых уравнений вида (2) типичны решения, которых нет у (автономных) обыкновенных дифференциальных уравнений. К этим решениям, в частности, относятся непрерывные ограниченные решения, стремящиеся при $t \to \infty$ к разрывным периодическим функциям с конечным числом разрывов на периоде. Назовем их асимптотически периодическими решениями. Из результатов, полученных в работе [2], следует что уравнения вида (2) могут иметь асимптотически 1-периодические и асимптотически 2-периодические решения и не могут иметь других асимптотически периодических решений.

При возмущениях вполне интегрируемых уравнений, т. е. при переходе от уравнения (2) к уравнению (1), свойство полной интегрируемости, вообще говоря, нарушается. Это делает изучение уравнения (1) более сложным, нежели изучение уравнения (2), и требует привлечения для этой цели идей теории возмущений.

Уравнение (1) рассматривалось в работах [3, 4] в предположении, что соответствующее ему невозмущенное уравнение (2) имеет асимптотически 1-периодические решения. Было показано, что при достаточно общих условиях (обычных условиях «грубости») эти решения устойчивы к возмущениям и не теряют при возмущениях свойство асимптотической периодичности. В настоящей заметке аналогичный результат получен в случае, когда уравнение (2) имеет асимптотически 2-периодические решения.

Пусть $\mu_\varepsilon(x, y)$ и $\mu_0(x, y)$—интегрирующие множители, $w_\varepsilon(x, y)=\text{const}$, $w_0(x, y) = \text{const}$ — общие интегралы соответственно уравнений $P_\varepsilon(x, y)\,dx + Q_\varepsilon(x, y)\,dy = 0$ и $P_0(x, y)\,dx + Q_0(x, y)\,dy = 0$. Следуя [3, 2], умножим уравнения (1) и (2) на $\mu_\varepsilon(x(t), x(t+1))$ и $\mu_0(x(t), x(t+1))$ и тем самым приведем их к виду

$$\frac{d}{dt} w_\varepsilon(x(t), x(t+1)) = F(w_\varepsilon(x(t), x(t+1))) + G_\varepsilon(x(t), x(t+1)) \tag{3}$$

и

$$\frac{d}{dt} w_0(x(t), x(t+1)) = F(w_0(x(t), x(t+1))), \tag{4}$$

где F и G_ε — некоторые функции, причем $G_0(x, y) \equiv 0$.

Под решениями уравнения (3) понимаются функции $x_\varepsilon(t) \in C^1(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$, удовлетворяющие уравнению при $t \in [0, \infty)$. Решения $x_0(t)$ уравнения (4) определяются аналогично.

Допустим, что выполняются следующие условия (см. [3]).

1. $F(0) = 0$ и в некоторой окрестности U точки $u = 0$ $-\lambda_1 > \dfrac{F(u') - F(u'')}{u' - u''} > -\lambda_2$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \infty$.

2. Соотношение $\omega_0(x, \varphi) = 0$ задает на некотором открытом ограниченном интервале $I \subset \mathbf{R}$ однозначное непрерывно дифференцируемое отображение $\varphi: I \to I$, такое, что

а) $\operatorname{Per}\varphi = \operatorname{Fix}\varphi^2$, $\operatorname{Per}\varphi \neq \operatorname{Fix}\varphi$ *.

б) $\| \varphi^2(x) | - 1 | > \zeta > 0$, $x \in \operatorname{Per}\varphi$.

Обозначим $A_\varphi = \operatorname{Per}\varphi$. Из условий а) и б) следует, что множество A_φ конечно и состоит из нечетного числа точек $a_1, a_2, \ldots, a_{2k+1}$, множество $A_\varphi^+ = \{a_1, a_3, \ldots, a_{2k+1}\}$ составляют притягивающие, а множество $A_\varphi^- = \{a_2, a_4, \ldots, a_{2k}\}$— отталкивающие точки отображения φ^2.

в) Существует $m < \infty$ такое, что $\varphi^{-2(m+1)}(A_\varphi^-) = \varphi^{-2m}(A_\varphi^-)$ и $\dot\varphi(x) \neq 0$ для $x \in \varphi^{-2m}(A_\varphi^-)$.

3. Функции $w_\varepsilon(x, y)$, $\dfrac{\partial}{\partial x} w_\varepsilon(x, y)$, $\dfrac{\partial}{\partial y} w_\varepsilon(x, y)$, $G_\varepsilon(x, y)$ в некоторой окрестности множества $\Gamma(\varphi/I)$ $(\Gamma(g/I) = \{(x, y) : x \in I,\ y = g(x)\}$ — график функции $y = g(x)$) непрерывно зависят от x, y, ε, причем функция $G_\varepsilon(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица с достаточно малой константой.

Из условий 2 следует, что множество A_φ состоит в точности из k циклов второго порядка $(a_i, a_{2(k+1)-i})$, $i = 1, \ldots, k$, и одной неподвижной

---

* $\operatorname{Per}\psi$ — множество периодических, а $\operatorname{Fix}\psi$ — множество неподвижных точек отображения ψ.

точки a_{k+1} отображения φ, притягивающей, если k — четное, и отталкивающей, если k нечетное. Из тех же условий следует, что множество J_φ минимальных устойчивых инвариантных интервалов* отображения φ^2 состоит в точности из k интервалов

$$I_i = [\min_{x\in[a_{2i-1}, a_{2i+1}]} \varphi^2(x), \max_{x\in[a_{2i-1}, a_{2i+1}]} \varphi^2(x)], \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Рассмотрим отображение φ_ε, задаваемое соотношением $w_\varepsilon(x, \varphi_\varepsilon) = 0$, и соответствующее ему двупараметрическое семейство отображений $\varphi_{\varepsilon,\varkappa_1,\varkappa_2}: x \to \varphi_\varepsilon(\varphi_\varepsilon(x) + \varkappa_1) + \varkappa_2$, $\varkappa_1, \varkappa_2 \in \mathbf{R}$. В силу условий 2) и 3) при достаточно малых $\varepsilon > 0$, $|\varkappa_1|$ и $|\varkappa_2|$ каждое из отображений этого семейства однозначно и непрерывно дифференцируемо и действует из I в I, причем множество $A_{\varepsilon,\varkappa_1,\varkappa_2}$ периодических точек и множество $J_{\varepsilon,\varkappa_1,\varkappa_2}$ минимальных устойчивых инвариантных интервалов отображения $\varphi_{\varepsilon,\varkappa_1,\varkappa_2}$ содержат столько же элементов, сколько соответственно множества A_φ и J_φ.

Определим класс периодических многозначных функций $\mathcal{P}_\varepsilon^{(2)}$. Ниже будет сформулирована теорема, утверждающая, что при достаточно малых $\varepsilon \geqslant 0$ решения $x_\varepsilon(t)$ уравнения (3) приближаются при $t \to \infty$ к функциям из $\mathcal{P}_\varepsilon^{(2)}$. Зафиксируем $\varepsilon \geqslant 0$ и $\varkappa \geqslant 0$.

Определение 1. Обозначим через $\mathcal{P}_\varepsilon^{(2)}$ класс полунепрерывных сверху 2-периодических функций $p(t): \mathbf{R}^+ \to 2^I$, однозначных на $[0,2)$ всюду, за исключением конечного множества точек $\mathcal{T}^{(2)}(p) = \{t_{p,1}, t_{p,2}, \ldots, t_{p,l}, t_{p,l+1} = t_{p,1}+1, t_{p,l+2}, = t_{p,2}+1, \ldots, t_{p,2l} = t_{p,l}+1\}$, $l = l(p)$, и таких, что

$$\text{I.}\quad \frac{d}{dt}\omega_\varepsilon(p(t), p(t+1)) = F(w_\varepsilon(p(t), p(t+1))) + G_\varepsilon(p(t), p(t+1)) \qquad (5)$$

при $t \in [0, 2) \setminus \mathcal{T}^{(2)}(p)$, причем

а) $|w_\varepsilon(p(t), p(t+1))| \leqslant \varkappa$ (условие малости),

б) для любого $t_{p,s} \in \mathcal{T}^{(2)}(p)$, $s = 1, \ldots, 2l$, существует $\lim\limits_{t\to t_{p,s}} w_\varepsilon(p(t), p(t+1)) = w_{p,s}$ (условие непрерывности).

II. $p(t_{p,s}) = I_{p,s}$ при $t_{p,s} \in \mathcal{T}^{(2)}(p)$, $s = 1, \ldots, 2l$, где $I_{p,s} = \varphi_{\varepsilon, w_{p,s}, w_{p,s+l}}(I^0_{p,s})$, $I^0_{p,s}$ — замкнутый интервал с концами $p(t_{p,s}-0)$, $p(t_{p,s}+0)$, причем

а) интервал $I_{p,s}$ — минимальный устойчивый инвариантный интервал отображения $\varphi_{\varepsilon, w_{p,s}, w_{p,s+l}}$.

Укажем, как устроен класс функций $\mathcal{P}_\varepsilon^{(2)}$ при достаточно малых $\varepsilon \geqslant 0$ и $|\varkappa|$.

Определение 2. Пусть $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, \ldots, t_l\}$ — конечное множество из $[0, 1)$, $\mathcal{H}^{(2)}(\mathcal{T})$ — множество отображений $h: \mathcal{T} \to A_\varphi^+$, удовлетворяющих условию: если $h(t_s) = a_{2i_s+1}$, $s = 1, \ldots, l$, $0 \leqslant i_s \leqslant k$, то

$$|i_{s+1} - i_s| = 1, \; s = 1, \ldots, l, \; i_{l+1} = 2(k+1) - i_1 \qquad (6)$$

(из условия (6) следует, что множество $\mathcal{H}^{(2)}(\mathcal{T})$ не пусто тогда и только

---

* Замкнутый интервал $\tilde I$ будем называть устойчивым инвариантным интервалом отображения ψ, если $\psi(\tilde I) = \tilde I$ и существует $\alpha > 0$ такое, что для любого интервала $\tilde I'$, $\tilde I' \neq \tilde I$, удовлетворяющего условию $\Delta(\tilde I' \tilde I) < \alpha$, выполняется неравенство $\Delta(\psi(\tilde I'), \tilde I) < \Delta(\tilde I', \tilde I)$, где Δ — расстояние Хаусдорфа, $(\Delta([a', b'], [a'', b'']) = \max\{|a'-a''|, |b'-b''|\}$. Если, кроме того, интервал $\tilde I$ не содержит устойчивых инвариантных интервалов этого отображения, отличных от точки, то $\tilde I$ будем называть минимальным устойчивым интервалом

тогда, когда либо $a_{k+1} \in A_\varphi^+$ и l четное, либо $a_{k+1} \in A_\varphi^-$ и l нечетное); $\mathcal{H}^{(2)} = \bigcup_{\mathcal{T}} \mathcal{H}^{(2)}(\mathcal{T})$.

Рассмотрим уравнение $F(w_\varepsilon(x, x)) + G_\varepsilon(x, x) = 0$. Из условий 1 — 3 следует, что при достаточно малых $\varepsilon \geqslant 0$ оно имеет единственный корень $a^\varepsilon \in I$, $\lim a^\varepsilon = a^0$, $a^0 = a_{k+1} \in A_\varphi$. Этому корню соответствует единственное стационарное решение $p(t) \equiv a^\varepsilon$ уравнения (5), принадлежащее, очевидно, классу $\mathcal{P}_\varepsilon^{(2)}$.

Утверждение. *Существуют $\varepsilon_1 > 0$ и $\varkappa > 0$ такие, что при каждом $\varepsilon < \varepsilon_1$ множество $\mathcal{P}_\varepsilon^{(2)} \setminus \{p(t) \equiv a^\varepsilon\}$ гомеоморфно множеству $\mathcal{H}^{(2)}$.*

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству соответствующего утверждения в [3].

Дадим определение сходимости при $t \to \infty$ непрерывных функций к 2-периодическим функциям $g(t): \mathbf{R}^+ \to 2^{\mathbf{R}}$.

Определение 3. Будем говорить, что функция $f(t): \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ асимптотически стремится к 2-периодической функции $g(t): \mathbf{R}^+ \to 2^{\mathbf{R}}$, если

$$\operatorname*{Lim}_{n \to \infty} \Gamma(f(t + 2n)/[0, 2]) = \Gamma(g(t)/[0, 2]) \text{ *}$$

Среди всех решений $x_0(t)$ вполне интегрируемого уравнения (4), для которых

$$\{(x, u): x = x_0(t),\ u = w(x_0(t), x_0(t+1)),\ t \in [0, \infty)\} \subset I \times U \tag{7}$$

(рассматриваем только такие решения), выделим класс решений, удовлетворяющих такому условию: если $t^* \in [0, 1)$ и $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x(t^* + n), A_\varphi^-) = 0$, то

$$\lim_{n \to \infty} |\dot{x}(t^* + n)| = \infty. \tag{8}$$

Обозначим этот класс $\mathfrak{X}$ и отметим, что он содержит почти все (удовлетворяющие условию (7)) решения уравнения (4).

Теорема. *Предположим, что выполняются условия 1 — 3 и $x_0(t) \in \mathfrak{X}$. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ такие, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ каждое решение $x_\varepsilon(t)$ уравнения (3), для которого $\| x_\varepsilon(t) - x_0(t) \|_{C^1_{[0,1]}} < \delta_0$, асимптотически стремится к некоторой функции $p_{x_\varepsilon(t)} \in \mathcal{P}_\varepsilon^{(2)}$.*

Кроме того, $\operatorname*{Lim}\limits_{\varepsilon_0, \delta_0 \to 0} \Gamma(p_{x_\varepsilon(t)}/[0, 2]) = \Gamma(p_{x_0(t)}/[0, 2])$; если $x'_\varepsilon(t)$, $\| x'_\varepsilon(t) - x_0(t) \|_{C^1_{[0,1]}} < \delta_0$ и $x''_\varepsilon(t)$, $\| x''_\varepsilon(t) - x_0(t) \|_{C^1_{[0,1]}} < \delta_0$ — два решения уравнения (3) и $\mathcal{T}^{(2)}(p_{x'_\varepsilon(t)}) = \mathcal{T}^{(2)}(p_{x''_\varepsilon(t)})$, то $p_{x'_\varepsilon(t)} = p_{x''_\varepsilon(t)}$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству соответствующей теоремы в случае 1-периодических «предельных» функций. Отметим его основные моменты.

Прежде всего доказывается устойчивость решений.

Определение. 4. Решение $x_0(t)$ уравнения (4) будем называть устойчивым, если для любого $\alpha > 0$ существуют такие $\varepsilon' > 0$, $\delta' > 0$, что при $\varepsilon < \varepsilon'$ каждое решение $x_\varepsilon(t)$ уравнения (3), для которого $|x_\varepsilon(t) - x_0(t)| < \delta'$, удовлетворяет неравенству

$$\Delta(\Gamma(x_\varepsilon/\mathbf{R}^+),\quad \Gamma(x_0/\mathbf{R}^+)) < \alpha, \tag{9}$$

где Δ — расстояние Хаусдорфа между множествами в $\mathbf{R}^2$.

---

* Символ Lim обозначает предел последовательности множеств (см., например, [6]).

Для доказательства устойчивости используется непрерывная зависимость решений (на любом конечном интервале $[0, N]$) от начальных данных и параметра ε и то, что $\overline{\lim_{t\to\infty}} | x_\varepsilon(t+2) - \varphi_\varepsilon^{(2)}(x_\varepsilon(t)) | \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

Пусть $x_0(t)$ — решение уравнения (4), асимптотически стремящееся к функции $p_{x_0(t)} \in \mathcal{P}_0^{(2)}$; $\mathcal{T}(p_{x_0(t)}) = \{t_1, t_2, \ldots, t_l\}$ — множество точек многозначности $p_{x_0(t)}$ на интервале $[0,1)$. Зададим в $\mathbf{R}^2$ окрестность множества $\Gamma(p_{x_0(t)}/\mathbf{R}^+)$ следующего вида: $\{(t, x)$: $t \in \mathbf{R}^+$, $\inf_{\tau\in(t-\beta, t+\beta)} \rho(x, p_{x_0(t)}(\tau) < \alpha)$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Эта окрестность, как легко увидеть, состоит из горизонтальных и вертикальных полос, ширина которых соответственно равна 2α и 2β. Назовем ее (α, β)-окрестностью $p_{x_0(t)}$. Из того, что $x_0(t)$ обладает свойством устойчивости, следует, что графики $C^0_{[0,1]}$-близких к $x_0(t)$ решений уравнения (3), начиная с некоторого $t = N$, попадают в (α, β)-окрестность $p_{x_0(t)}$ и остаются в ней при всех $t \in [N, \infty)$.

Зафиксируем решение $x_\varepsilon(t)$ уравнения (3), обладающее этим свойством. Можно доказать, что при $n \to \infty$ рассматриваемая (α, β)-окрестность допускает сжатие вертикальных полос относительно $\Gamma(x_\varepsilon/\mathbf{R}^+)$. Именно, существует множество $\mathcal{T}(p_{x_\varepsilon(t)} = \{t_1', t_2', \ldots, t_l'\} \subset [0, 1)$ и последовательность $\beta_n \to 0$, $\beta_n > 0$, $n = 0, 1, \ldots$, такие, что $x_\varepsilon(t)$ удовлетворяет условию: если $t \in [n, n+1)$ и $\rho(\{t\}, \mathcal{T}(p_{x_\varepsilon(t)})) > \beta_n$, то

$$\rho(x_\varepsilon(t), A_\varphi^+) < \alpha. \tag{10}$$

При этом в силу устойчивости $\mathcal{T}(p_{x_\varepsilon(t)}) \to \mathcal{T}(p_{x_0(t)})$ при $\varepsilon \to 0$, $\max_{t\in[0,1]} |x_\varepsilon(t) - - x_0(t)| \to 0$. Чтобы показать, что $x_\varepsilon(t)$ удовлетворяет условию (10), рассматривается равенство

$$\dot{x}_\varepsilon(t+1) = \varphi_\varepsilon'(x_\varepsilon(t))\,\dot{x}_\varepsilon(t) + F(w_\varepsilon(x_\varepsilon(t), x(t+1)) + G_\varepsilon(x_\varepsilon(t), x_\varepsilon(t+1)). \tag{11}$$

В правой части его второе и третье слагаемое уменьшением ε и увеличением t можно сделать сколь угодно малыми. В то же время первое слагаемое за счет коэффициента $\dot{\varphi}_\varepsilon(x_\varepsilon(t))$ увеличивает (через два шага) абсолютную величину производной $\dot{x}(t)$ для тех $t = t^*$, для которых $\rho(x_\varepsilon(t), A_\varphi^-)$ достаточно мало (т. е. получаем $|\dot{x}_\varepsilon(t^*+2)| > |\dot{x}(t^*)|$). Рост производной в этих точках в конечном итоге и приводит к выполнению условия (10).

После того, как установлено «сжатие вертикальных полос», для доказательства теоремы остается показать, что при $t \to \infty$ также имеет место «сжатие горизонтальных полос». Для этого рассматривается последовательность функций $z_n(t) = |x_\varepsilon(t + 2n + 2) - x_\varepsilon(t + 2n)|$, $t \in [0, 2)$, $n = 0, 1, \ldots$, и показывается, что $z_n(t) \to 0$, $n \to \infty$, равномерно на любом замкнутом интервале $[t', t''] \subset [0, 2)$, не содержащем точек из множества $\mathcal{T}^{(2)}(p_{x_\varepsilon(t)}) = \{t_1', t_2', \ldots, t_l', t_{l+1}' = t_1' + 1, t_{l+2}' = t_2' + 1, \ldots, t_{2l}' = t_l' + 1\}$. Тогда в силу полноты $C^0_{[t', t'']}$ решение $x_\varepsilon(t)$ асимптотически стремится к некоторой функции $p_{x_\varepsilon(t)} \in \mathcal{P}_\varepsilon^{(2)}$, причем множество точек многозначности $p_{x_\varepsilon(t)}$ на $[0, 2)$, очевидно, равно $\mathcal{T}^{(2)}(p_{x_\varepsilon(t)})$.

В заключение отметим, что в том случае, когда отображение φ имеет циклы периода 2^m, $m > 1$, для уравнения (3) можно было бы ожидать существования асимптотически 2^m — периодических решений. Но, как уже отмечалось в начале статьи, это не имеет места даже в случае вполне интегрируемого уравнения (4). Причиной здесь является то, что наличие у отображения φ циклов периода >2 приводит к нарушению условия 2,в), а это в свою очередь влечет за собой бесконечный рост частоты колебаний при $t \to \infty$ на любом интервале длины $\geqslant 1$ у тех решений уравнения (4), которые «притягиваются» этим циклом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Романенко Е. Ю., Шарковский А. Н. Дифференциально-функциональные уравнения, близкие к функциональным.— В кн.: Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Киев.: Наук. думка, 1979, с. 178—209.
2. Романенко Е. Ю., Шарковский А. Н. Качественное исследование одного класса дифференциально-разностных уравнений.— В кн.: Качественное исследование дифференциально-разностных уравнений. Киев. Наук. думка, 1980, с. 129—144.
3. Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю., Шарковский А. Н. О качественном поведении решений квазилинейных дифференциально-разностных уравнений.— В кн.: Исследование дифференциальных, разностных и дифференциально-разностных уравнений. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980, с. 38—50.
4. Майстренко Ю. Л. Теорема о сохранении асимптотически периодических решений у дифференциально-разностных уравнений, близких к вполне интегрируемым.— В кн.: Исследование дифференциальных, разностных и дифференциально-разностных уравнений. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980, с. 50—81.
5. Шарковский А. Н. Гладкие решения функциональных и дифференциально-разностных уравнений.— В кн.: Труды V Международной конференции по нелинейным колебаниям. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1969, с. 229.
6. Куратовский К. Топология. Т. I.— М.: Мир, 1966.— 594 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
2.X 1980 г.