УДК 517.944

*В. Б. Мосеенков*

# О равномерной обратимости линейного дифференциального оператора

Пусть $R^n$ — евклидово пространство размерности $n$; $C^r$ — пространство $r$ раз непрерывно дифференцируемых на $\tau = \{x \in R^n \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 2\pi,\ i = 1, \ldots, n\}$ функций, $2\pi$-периодических по каждой переменной $x_i$ ($|\cdot|_r$ — норма в $C^r$); $\Pi$ — множество тригонометрических полиномов из $C^\infty = \bigcap\limits_{r \geqslant 0} C^r$; $W^r = W_2^r(\tau)$ — пространство Соболева с нормой $\|\cdot\|_r$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_r$ таким, что $(u, v)_r = ((1 - \Delta)^r u, v)$, если $u, v \in \Pi$ ($(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_0$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_0$, $\Delta$ — оператор Лапласа); $W^{-r}$ — пространство с негативной нормой $\|\cdot\|_{-r}$, порожденное пространством $W^r$. Если $L$ — линейное дифференциальное выражение порядка $l$ вида $L = \Sigma a_\sigma D^\sigma$, где $|\sigma| = \sigma_1 + \ldots + \sigma_n \leqslant l$, $D^\sigma u = D_1^{\sigma_1} \ldots D_n^{\sigma_n} u$ — обобщенная производная порядка $|\sigma|$ функции $u \in W^{|\sigma|}$ $\left(D_i = \frac{\partial}{\partial x_i},\ i = 1, \ldots, n\right)$, то под $L^*$ будем понимать дифференциальное выражение, сопряженное к $L$, а под $|L|_p$ — сумму $\Sigma |a_\sigma|_p$ ($|\sigma| \leqslant l$). Область определения и область значений оператора $\Lambda$ будем обозначать через $\mathfrak{D}(\Lambda)$ и $R(\Lambda)$ соответственно.

Здесь исследуются условия разрешимости линейных уравнений вида

$$Lu \equiv \sum_{|\sigma| \leqslant l} a_\sigma(x) D^\sigma u(x) = f(x), \quad x \in \tau, \tag{1}$$

где $f \in W^{-k}$, $a_\sigma \in C^{\max\{|\sigma|, |\sigma|+r\}}$ $(|\sigma| \leqslant l)$; $k, r = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$; $k \leqslant \max\{l, l+r\}$.

Слабым решением уравнения (1) назовем функцию $u \in W^{-r}$, удовлетворяющую равенству

$$(u, L^*v) = (f, v) \quad (v \in W^{\max\{l, l+r\}}). \tag{2}$$

Если для всякого $f \in W^{-k}$ найдется $u \in W^{-r}$, удовлетворяющее равенству (2) и неравенству

$$\| u \|_{-r} \leqslant C \| f \|_{-k} \ (C > 0), \tag{3}$$

то оператор $L$ будем называть равномерно обратимым из $W^{-k}$ в $W^{-r}$. Линейное множество таких операторов обозначим через $\mathfrak{L}(W^{-r}, W^{-k})$.

Как известно [1], включение $L \in \mathfrak{L}(W^{-r}, W^{-k})$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\| L^*v \|_r \geqslant C^{-1} \| v \|_k \ (C > 0; v \in W^{\max\{l, l+r\}}). \tag{4}$$

Весьма эффективным методом получения неравенств вида (4) является так называемый $abc$-метод. Суть его состоит в нахождении дифференциального оператора $\Lambda$ (точнее его коэффициентов $a, b, c, \ldots$) такого, что для всякого $v \in W^{\max\{l, l+r\}}$ выполняются неравенства

$$C_1 \| v \|_k^2 \leqslant (L^*v, \Lambda v) \leqslant C_2 \| L^*v \|_r \| v \|_k. \tag{5}$$

Так, например, в работах [2—5] существование слабых решений уравнений Трикоми, Чаплыгина и др. было доказано на основании оценок (5) с индексами $k = 1$, $r = 0$. В работах [6, 7] для доказательства разрешимости гиперболических уравнений с вырождением использовался интегральный оператор $\Lambda$, с помощью которого выводились неравенства типа (5). Обобщая приведенные результаты, можно сформулировать следующие четыре достаточных условия равномерной обратимости оператора $L$.

1°. Если существует линейный оператор $\Lambda$, действующий из $W^{\max\{l, l+r\}}$ в $W^{-r}$ такой, что неравенства

$$C_1^2 \| \Lambda v \|_{-r}^2 \leqslant \| v \|_k^2 \leqslant C_2 (L^*v, \Lambda v) \ (C_1, C_2 > 0) \tag{6}$$

либо

$$C_1^2 \| v \|_k^2 \leqslant \| \Lambda v \|_{-r}^2 \leqslant C_2 (L^*v, \Lambda v) \ (C_1, C_2 > 0) \tag{7}$$

справедливы при всех $v \in W^{\max\{l, l+r\}}$, то $L \in \mathfrak{L}(W^{-r}, W^{-k})$ $(C = C_1^{-1} C_2)$.

Действительно, из неравенств (6) (или (7)) и обобщенного неравенства Коши [1] вытекает неравенство (4), откуда и следует последнее включение.

Заметим, что первое неравенство (6) выполняется, например, если оператор $\Lambda$ является обратным по отношению к некоторому линейному оператору $\Lambda'$, действующему из $\mathfrak{D}(\Lambda') \subset W^{-r}$ на $\mathfrak{D}(\Lambda) = W^{\max\{l, l+r\}} \subset W^k$. С другой стороны, первое неравенство (7) справедливо тогда и только тогда, когда существует обратный оператор $\Lambda^{-1}$, действующий из $R(\Lambda) \subset W^{-r}$ на $\mathfrak{D}(\Lambda) = W^{\max\{l, l+r\}} \subset W^k$. Исходя из сказанного, можно сформулировать еще два достаточных условия равномерной обратимости оператора $L$.

2°. Если линейный оператор $\Lambda$, действующий из $\mathfrak{D}(\Lambda) \subset W^{-r}$ на $W^{\max\{l, l+r\}} \subset W^k$, имеет обратный оператор $\Lambda^{-1} : W^{\max\{l, l+r\}} \to W^{-r}$ и неравенства

$$C_1^2 \| \omega \|_{-r}^2 \leqslant \| \Lambda\omega \|_k^2 \leqslant C_2 (L^*\Lambda\omega, \omega) \ (C_1, C_2 > 0) \tag{8}$$

либо

$$C_1^2 \| \Lambda\omega \|_k^2 \leqslant \| \omega \|_{-r}^2 \leqslant C_2 (L^*\Lambda\omega, \omega) \ (C_1, C_2 > 0) \tag{9}$$

справедливы при всех $\omega \in \mathfrak{D}(\Lambda)$, то $L \in \mathfrak{L}(W^{-r}, W^{-k})$ $(C = C_1^{-1} C_2)$.

В тех случаях, когда требуется доказать равномерную обратимость оператора $L$ в позитивных пространствах ($r \leqslant k \leqslant 0$), применение условий 1°, как правило, приводит к необходимости нахождения интегрального оператора $\Lambda$, удовлетворяющего неравенствам (6) или (7), что связано со значительными трудностями технического характера. Условия 2° позволяют обойти эти трудности, разыскивая дифференциальный оператор $\Lambda$, который в некотором смысле обратим и удовлетворяет неравенствам (8) или (9).

Рассмотрим конкретную ситуацию и покажем, как неравенства (9) применяются для решения некоторых вопросов, связанных с равномерной обратимостью линейного оператора в шкале позитивных пространств (решенная ниже задача возникает обычно при исследовании нелинейных дифференциальных уравнений, близких к линейным). Всюду далее речь идет о действительнозначных функциях.

Пусть коэффициенты дифференциального выражения $L$ в (1) постоянны и найдено дифференциальное выражение $\Lambda_0 = \Sigma \lambda_\sigma D^\sigma$ порядка $m \leqslant l - \alpha$ ($0 \leqslant \alpha \leqslant l$) с постоянными коэффициентами $\lambda_\sigma$ ($|\sigma| \leqslant m$) такое, что уравнение $\Lambda_0 \omega = v$ имеет единственное решение $\omega \in \Pi$ для всякого $v \in \Pi$ и выполняется неравенство

$$\|\omega\|_{l-\alpha}^2 \leqslant C_2 (L\omega, \Lambda_0 \omega) \quad (C_2 > 0;\ \omega \in \Pi). \tag{10}$$

Тогда для всякого $v \in \Pi$ справедливо неравенство (9) с оператором $\Lambda = \Lambda_0$, константой $C_1 = (\Sigma \lambda_\sigma^2)^{-1/2}$ и индексами $k = 0$, $r = \alpha - l$. Следовательно, неравенство (4) (с константой $c = c_1^{-1} c_2$) имеет место при всех $v \in \Pi$, а значит, и при всех $v \in W^l$, так как $\|L^* v\|_{-(l-\alpha)} \leqslant \tilde{C} \|v\|_\alpha \leqslant \tilde{C} \|v\|_l$ ($\tilde{C} > 0$; $v \in \Pi$), т. е. существует замыкание оператора $L^*$, действующее из $W^l$ в $W^{-(l-\alpha)}$ (оно обозначено здесь тем же символом $L^*$). Таким образом, $L \in \mathfrak{L}(W^{l-\alpha}, W^0)$ ($C = C_1^{-1} C_2$).

Рассмотрим линейные операторы из $\Pi$ в $C^\beta$ вида $L_\varepsilon = L + \varepsilon K$, $K = \sum_{|\sigma| \leqslant p} b_\sigma(x) D^\sigma$, где $\varepsilon$ — малый положительный параметр, $b_\sigma \in C^{\max\{|\sigma|, \beta\}}$ ($|\sigma| \leqslant p$). Если $0 \leqslant p \leqslant l - \alpha$, то для всякого $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0(|K|_\beta)$ имеет место включение $L_\varepsilon \in \mathfrak{L}(W^{l-\alpha+\beta}, W^\beta)$, $\beta \geqslant 0$. Действительно, вводя оператор $\Lambda_\beta = (1 - \Delta)^\beta \Lambda_0$, из (10) легко получить неравенства

$$C_1^2 \|\Lambda_\beta \omega\|_{-\beta}^2 \leqslant \|\omega\|_{l-\alpha+\beta}^2 \leqslant 2C_2 (L_\varepsilon \omega, \Lambda_\beta \omega), \tag{11}$$

откуда следует, что

$$2C_1^{-1} C_2 \|L_\varepsilon^* v\|_{-(l-\alpha+\beta)} \geqslant \|v\|_\beta, \tag{12}$$

поскольку оператор $(1 - \Delta)^\beta$, а значит и $\Lambda_\beta$, а обратим на $\Pi$. Так как $\|L_\varepsilon^* v\|_{-(l-\alpha+\beta)} \leqslant \tilde{C} \|v\|_\alpha$ ($\tilde{C} > 0$; $v \in \Pi$), т. е. существует замыкание оператора $L_\varepsilon^*$ действующее из $W^l$ в $W^{-(l-\alpha+\beta)}$, то неравенство (12) имеет место при всех $v \in W^l$, что и доказывает требуемое включение.

В том случае, когда $l \geqslant p \geqslant l - \alpha$, равномерная обратимость оператора $L_\varepsilon$ имеет место при дополнительных ограничениях на $p$ и на коэффициенты оператора $K$. Приведем доказательство этого утверждения.

Лемма. *Если* $K = \Sigma b_\sigma D^\sigma$, $b_\sigma \in C^{p_0(|\sigma|)}$, $|\sigma| \leqslant p$; $M = \Sigma c_\zeta D^\zeta$, $c_\zeta \in C^{q_0(|\zeta|)}$, $|\xi| \leqslant q$, *то для всякого* $\omega \in \Pi$ *имеет место неравенство*

$$|(K\omega, M\omega)| \leqslant c_{p,q} \left( \sum_{|\sigma| \leqslant p} |b_\sigma|_{p_0(|\sigma|)} \right) \left( \sum_{|\zeta| \leqslant q} |c_\zeta|_{q_0(|\zeta|)} \right) \|\omega\|_{\left[\frac{p+q}{2}\right]}^2, \tag{13}$$

*где константа $c_{p,q}$ зависит только от $p$ и $q$, $[s]$ — целая часть $s$, $p_0(p) =$*

$$= q_0(q) = \frac{1}{2}|p-q|, \text{ если } p+q \text{ четное},$$

$$p_0(p) = q_0(q) = \max\left\{\left[\frac{|p-q|+1}{2}\right], \min\left\{\left[\frac{n+1}{2}\right], \left[\frac{p+q+1}{2}\right]\right\}\right\},$$

*если* $p+q$ *нечетное*,

$$p_0(|\sigma|) = \max\left\{0, |\sigma| - \left[\frac{p+q}{2}\right], \left[\frac{q-p+1}{2}\right]\right\} \quad (|\sigma| < p),$$

$$q_0(|\zeta|) = \max\left\{0, |\zeta| - \left[\frac{p+q}{2}\right], \left[\frac{p-q+1}{2}\right]\right\} \quad (|\zeta| < q).$$

Доказательство. Пусть $i_1, \ldots, i_{2\alpha+1}$ — перестановка чисел $1, \ldots, 2\alpha+1$ ($\alpha$ — положительное целое), тогда сумму $I = \sum\limits_{i_1,\ldots,i_{\alpha+1}} \left(\prod\limits_{r=1}^{\alpha+1} D_{i_r}\right) \times \left[\omega \cdot \left(\prod\limits_{r=\alpha+2}^{2\alpha+1} D_{i_r}\right)\omega\right]$ можно записать в виде

$$I = \sum_{i_1,\ldots,i_{\alpha+1}} \sum_{s=1}^{\alpha+1} \sum_{i_{k_1},\ldots,i_{k_s}} \left(\prod_{r=1}^{s} D_{i_{k_r}}\right)\omega \cdot \left(\prod_{r=s+1}^{\alpha+1} D_{i_{k_r}} \prod_{r=\alpha+2}^{2\alpha+1} D_{i_r}\right)\omega +$$

$$+ \binom{\alpha+1}{2\alpha+1}\omega \cdot \left(\prod_{r=1}^{2\alpha+1} D_r\right)\omega,$$

откуда

$$\omega \cdot \left(\prod_{r=1}^{2\alpha+1} D_r\right)\omega = \left[\binom{\alpha+1}{2\alpha+1}\right]^{-1} \left\{ \sum_{i_1,\ldots,i_{\alpha+1}} \left(\prod_{r=1}^{\alpha+1} D_{i_r}\right)\left[\omega \cdot \left(\prod_{r=\alpha+2}^{2\alpha+1} D_{i_r}\right)\omega\right] - \right.$$

$$\left. - \sum_{i_1,\ldots,i_{\alpha+1}} \sum_{s=1}^{\alpha+1} \sum_{i_{k_1},\ldots,i_{k_s}} \left(\prod_{r=1}^{s} D_{i_{k_r}}\right)\omega \cdot \left(\prod_{r=s+1}^{\alpha+1} D_{i_{k_r}} \sum_{r=\alpha+2}^{2\alpha+1} D_{i_r}\right)\omega \right\}.$$

Применяя последнее равенство и интегрируя по частям, имеем

$$\left(b\omega, \left(\prod_{r=1}^{2\alpha+1} D_r\right)\omega\right) = \left[\binom{\alpha+1}{2\alpha+1}\right]^{-1} \left\{ \sum_{i_1,\ldots,i_{\alpha+1}} (-1)^{\alpha+1} \left(\left(\prod_{r=1}^{\alpha+1} D_{i_r}\right) b \cdot \omega,\right.\right.$$

$$\left.\left(\prod_{r=\alpha+2}^{2\alpha+1} D_{i_r}\right)\omega\right) + \sum_{i_1,\ldots,i_{\alpha+1}} \sum_{\substack{s=1 \\ s=2k+1}}^{\alpha+1} \sum_{i_{k_1},\ldots,i_{k_s}} \left[\left(b\omega, \left(\prod_{r=1}^{2\alpha+1} D_r\right)\omega\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\lambda=1}^{s} (-1)^{\lambda} \left(D_{i_{k_\lambda}} b \cdot \left(\prod_{r=0}^{\lambda-1} D_{i_{k_r}} \prod_{r=s+1}^{2\alpha+1} D_{i_{k_r}}\right)\omega, \left(\prod_{r=\lambda+1}^{s} D_{i_r}\right)\omega\right)\right] +$$

$$+ \sum_{i_1,\ldots,i_{\alpha+1}} \sum_{\substack{s=1 \\ s=2k}}^{\alpha+1} \sum_{i_{k_1},\ldots,i_{k_s}} \left[\left(b\omega, \left(\prod_{r=1}^{2\alpha+1} D_r\right)\omega\right) + \sum_{\lambda=s+1}^{2\alpha+1} (-1)^{\lambda} \left(D_{i_{k_r}} b \cdot \left(\prod_{r=1}^{\lambda-1} D_{i_{k_r}}\right)\omega,\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left(\prod_{r=1+\lambda}^{2\alpha+1} D_{i_{k_r}}\right)\omega\right)\right]\right\} = (2^{\alpha+1} - 1)\left(b\omega, \left(\prod_{r=1}^{2\alpha+1} D_r\right)\omega\right) - I',$$

так как

$$\left[\binom{\alpha+1}{2\alpha+1}\right]^{-1}\sum_{i_1,\ldots,i_{\alpha+1}}\sum_{s=1}^{\alpha+1}\sum_{i_{k_1},\ldots,i_{k_s}}1=2^{\alpha+1}-1.$$

В полученном равенстве $i_{k_r}=i_r$, $r=\alpha+2,\alpha+3,\ldots,2\alpha+1$, а сумма $I'$ состоит из слагаемых вида $(D^\sigma b\cdot D^\rho\omega, D^\zeta\omega)$, где $|\sigma|\leqslant\alpha+1$, $|\rho|\leqslant\alpha$, $|\zeta|\leqslant\alpha$. Таким образом, при $\alpha\neq0$ имеет место равенство $\left(b\omega,\left(\prod_{r=1}^{2\alpha+1}D_r\right)\omega\right)\leqslant$ $\leqslant\frac{1}{2}(2^\alpha-1)I'$, из которого следует неравенство $\left|\left(b\omega,\left(\prod_{r=1}^{2\alpha+1}D_r\right)\omega\right)\right|\leqslant$ $\leqslant c_\alpha|b|_{\alpha+1}|\omega\|^2_\alpha$.

Аналогично можно оценить выражения $(b\omega, D^\sigma\omega)$, где $|\sigma|=2\alpha$ $(\alpha\neq0)$ или $|\sigma|=1$. Следовательно, для всяких $\omega\in\Pi$, $b\in C^{\left[\frac{\beta+1}{2}\right]}$ выполняется неравенство

$$\left|\left(b\omega,\left(\prod_{r=1}^{\beta}D_r\right)\omega\right)\right|\leqslant c|b|_{\left[\frac{\beta+1}{2}\right]}\|\omega\|^2_{\left[\frac{\beta}{2}\right]},\tag{14}$$

где константа $c$ зависит только от $\beta$.

Оценим выражение $W_{\sigma\zeta}=(d_{\sigma\zeta}D^\sigma\omega, D^\zeta\omega)$, где $d_{\sigma\zeta}=b_\sigma c_\zeta$, $|\sigma|\leqslant p$, $|\zeta|\leqslant$ $\leqslant q$, предполагая для определенности, что $p\leqslant q$. Без ограничения общности будем считать, что $p=|\sigma|<|\zeta|=q$, $0<\zeta_s-\sigma_s=2\alpha_s$ $(s=1,\ldots,n_1)$, $0<\zeta_s-\sigma_s=2\alpha_s+1$ $(s=n_1+1,\ldots,n_2)$, $0<\sigma_s-\zeta_s=2\alpha_s$ $(s=n_2+1,\ldots$ $\ldots,n_3)$, $0<\sigma_s-\zeta_s=2\alpha_s+1$ $(s=n_3+1,\ldots,n_4)$, $\sigma_s=\zeta_s$ $(s=n_4+1,\ldots,n)$; $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_{n_4}$, $|k|=k_1+\ldots+k_{n_4}$, $\binom{k}{\alpha}=\prod_{s=1}^{n_4}\binom{k_s}{\alpha_s}$ ($k$ — вектор с целочисленными компонентами $k_s\in[0,\alpha_s]$, $s=1,\ldots,n_4$).

Если $p+q$ четное, то после интегрирования по частям получим неравенство

$$|W_{\sigma\zeta}|\leqslant\widetilde{c}_{\sigma\zeta}|d_{\sigma\zeta}|_{\left[\frac{q-p}{2}\right]}\|\omega\|^2_{\left[\frac{p+q}{2}\right]}.\tag{15}$$

Если $p+q$ нечетное, то, интегрируя по частям, $W_{\sigma\zeta}$ можно представить в виде суммы слагаемых вида $I_{\zeta\varkappa\tau}=\pm(D^\xi d_{\sigma\zeta}D^\varkappa\omega, D^\tau\omega)$, где $|\xi|=1$, $|\varkappa|+|\tau|=p+q-1$, $p\leqslant|\tau|\leqslant q-1$, и слагаемого $I_{\sigma\xi}=(-1)^{|\alpha|+n_2-n_1}\times$ $\times\left(d_{\sigma\zeta}\psi_{\sigma\zeta},\left(\prod_{s=n_1+1}^{n_2}D_s\right)\left(\prod_{s=n_3+1}^{n_4}D_s\right)\psi_{\sigma\zeta}\right)$, где

$$\psi_{\sigma\xi}=\left(\prod_{s=1}^{n_2}D_s^{\sigma_s+\alpha_s}\right)\left(\prod_{s=n_2+1}^{n_4}D_s^{\zeta_s+\alpha_s}\right)\left(\prod_{s=n_4+1}^{n}D_s^{\sigma_s}\right)\omega=D^\mu\omega$$

$$\left(|\mu|=\frac{1}{2}(p+q+n_1-n_2+n_3-n_4)\right).$$

Оценивая $I_{\xi\varkappa\tau}$ так же, как $W_{\sigma\xi}$ в (15), получим

$$|I_{\xi\varkappa\tau}|\leqslant\widetilde{c}_{\xi\varkappa\tau}|d_{\sigma\zeta}|_{\left[\frac{q-p+1}{2}\right]}\|\omega\|^2_{\left[\frac{p+q-1}{2}\right]},\tag{16}$$

поскольку $||\tau|-|\varkappa||\leqslant q-p-1$.

В силу неравенства (14) имеем

$$|I_{\sigma\zeta}| \leqslant \tilde{c}_{\sigma\zeta} |d_{\sigma\zeta}|_{\left[\frac{n_2-n_1+n_4-n_3+1}{2}\right]} \|\omega\|^2_{\frac{p+q}{2}-\left]\frac{n_2-n_1+n_4-n_3}{2}\right[} \tag{17}$$

($]s[$ — дробная часть $s$). Поскольку $\left[\frac{n_2-n_1+n_4-n_3+1}{2}\right] \leqslant \min\left\{\left[\frac{n+1}{2}\right],\right.$ $\left.\left[\frac{p+q+1}{2}\right]\right\}$, $\frac{p+q}{2} - \left]\frac{n_2-n_1+n_4-n_3}{2}\right[ = \left[\frac{p+q}{2}\right]$, то из неравенств (15) — (17) окончательно получаем

$$|W_{\sigma\zeta}| \leqslant \tilde{c}_{\sigma\zeta} |b_\sigma|_{p_0(p)} |c_\zeta|_{q_0(q)} \|\omega\|^2_{\left[\frac{p+q}{2}\right]}, \tag{18}$$

где $p_0(p) = q_0(q) = \max\left\{\left[\frac{q-p+1}{2}\right], \min\left\{\left[\frac{n+1}{2}\right], \left[\frac{p+q+1}{2}\right]\right\}\right\}$.

Выражения $W_{\sigma\zeta}$, где $|\sigma| \leqslant p$, $|\zeta| = q$, после интегрирования по частям можно оценить следующим образом:

$$|W_{\sigma\zeta}| \leqslant \tilde{c}_{\sigma\zeta} |b_\sigma|_{q-\left[\frac{p+q}{2}\right]} |c_\zeta|_{q-\left[\frac{p+q}{2}\right]} \|\omega\|_{|\sigma|+q-\left[\frac{p+q}{2}\right]} \|\omega\|_{\left[\frac{p+q}{2}\right]} \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{c}_{\sigma\zeta} |b_\sigma|_{\left[\frac{q-p+1}{2}\right]} |c_\zeta|_{\left[\frac{q-p+1}{2}\right]} \|\omega\|_{\left[\frac{p+q-1}{2}\right]} \|\omega\|_{\left[\frac{p+q}{2}\right]}. \tag{19}$$

Если $|\sigma| \leqslant p$, $|\zeta| < q$ то выражения $W_{\sigma\zeta}$ оцениваются аналогично:

$$|W_{\sigma\zeta}| \leqslant \tilde{c}_{\sigma\zeta} |b_\sigma|_{q_0(|\zeta|)} |c_\zeta|_{q_0(|\zeta|)} \|\omega\|_{p+|\zeta|-\left[\frac{p+q}{2}\right]} \|\omega\|_{\left[\frac{p+q}{2}\right]} \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{c}_{\sigma\zeta} |b_\sigma|_{\left[\frac{q-p-1}{2}\right]} |c_\zeta|_{q_0(|\zeta|)} \|\omega\|_{\left[\frac{p+q-1}{2}\right]} \|\omega\|_{\left[\frac{p+q}{2}\right]}. \tag{20}$$

Из неравенств (18) — (20) следует неравенство (13). Лемма доказана.

Теорема. *Пусть выполняется неравенство* (10), $K = \Sigma b_\sigma D^\sigma$, $b_\sigma \in C^{\max\{|\sigma|, p_0(|\sigma|)\}}$ $(|\sigma| \leqslant p)$, $\left[\frac{p+m}{2}\right] \leqslant l - \alpha$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \left(\sum_{|\sigma| \leqslant p} |b_\sigma|_{p_0(|\sigma|)}\right)$, *где*

$p_0(p) = \frac{1}{2} |2\beta + m - p|$, *если* $m + p$ *четное,*

$p_0(p) = \max\left\{\left[\frac{|2\beta + m - p| + 1}{2}\right], \min\left\{\left[\frac{n+1}{2}\right], \beta + \left[\frac{m+p+1}{2}\right]\right\}\right\}$,

*если* $m + p$ — *нечетное,*

$p_0(|\sigma|) = \max\left\{0, |\sigma| - \left[\frac{p+m}{2}\right] - \beta, \left[\frac{2\beta + m - p + 1}{2}\right]\right\}$ $(|\sigma| < p)$.

*Тогда* $L_\varepsilon \in \mathfrak{L}(W^{l-\alpha+\beta}, W^\beta)$ $(\beta \geqslant 0;\ C = 2C_1^{-1}C_2)$.

Доказательство. Поскольку неравенство (10) справедливо для всякого $\omega \in \Pi$, то $\|D^\sigma\omega\|^2_{l-\alpha} \leqslant C_2 (LD^\sigma\omega, \Lambda_0 D^\sigma\omega)$, откуда, просуммировав по $\{\sigma \mid |\sigma| \leqslant \beta\}$, получим

$$\|\omega\|^2_{l-\alpha+\beta} \leqslant C_2 (L\omega, \Lambda_\beta\omega). \tag{21}$$

Так как $\left[\frac{1}{2}(2\beta+m+p)\right] \leqslant l-\alpha+\beta$, $b_\sigma \in C^{p_0(|\sigma|)}$, то согласно лемме

$$|(K\omega, \Lambda_\beta\omega)| \leqslant c_{p,2\beta+m} |\Lambda_\beta|_0 \left(\sum_{|\sigma|\leqslant p} |b_\sigma|_{p_0(|\sigma|)}\right) \|\omega\|^2_{\left[\frac{2\beta+m+p}{2}\right]} \leqslant \frac{1}{2\varepsilon_0} \|\omega\|^2_{l-\alpha+\beta}, \tag{22}$$

если $\varepsilon_0 \leqslant \left[2c_{p,2\beta+m} |\Lambda_\beta|_0 \left(\sum_{|\sigma|\leqslant p} |b_\sigma|_{p_0(|\sigma|)}\right)\right]^{-1}$.

Из неравенств (21) и (22) имеем $2C_2(L_\varepsilon\omega, \Lambda_\beta\omega) \geqslant 2\|\omega\|^2_{l-\alpha+\beta} - 2\varepsilon|(K\omega, \Lambda_\beta\omega)| \geqslant \|\omega\|^2_{l-\alpha+\beta}$. С другой стороны,

$$\|\Lambda_\beta\omega\|_{-\beta} = \sup_{0\neq\psi\in W^\beta} \frac{|(\Lambda_0\omega, \psi)_\beta|}{|\psi\|_\beta} \leqslant c_1^{-1} \|\omega\|_{l-\alpha+\beta}.$$

Таким образом, для всякого $\omega \in \Pi$ справедливо неравенство (11), а значит и (12). Поскольку $b_\sigma \in C^{|\sigma|}$, то существует замыкание оператора $L^*$, действующее из $W^l$ в $W^{-(l-\alpha+\beta)}$ и удовлетворяющее неравенству (12), что и доказывает теорему.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев: Наук. думка, 1965.— 798 с.
2. Березанский Ю. М. Некоторые примеры «неклассических» краевых задач для уравнений в частных производных.— ДАН СССР, 1960, **131**, № 3, с. 478—481.
3. Березанский Ю. М. Энергетические неравенства для некоторых классов уравнений смешанного типа.— ДАН СССР, 1960, **132**, № 1, с. 9—12.
4. Friedrichs K. O. Symmetric positive linear differential equations.— Comm. Pure Appl. Math., 1958, **11**, № 3, p. 333—418.
5. Morawetz C. S. Weak solutions for a system of equations of elliptic — hyperbolic type.— Comm. Pure Appl. Math., 1958, **11**, N 3, p. 315—331.
6. Диденко В. П. О краевых задачах для многомерных гиперболических уравнений с вырождением.— ДАН СССР, 1972, **205**, № 4, с. 763—766.
7. Диденко В. П. О задачах типа Коши—Гурса для многомерного гиперболического уравнения с вырождением.— ДАН СССР, 1973, **210**, № 5, с. 1008—1010.



Институт математики
АН УССР



Поступила в редакцию 13.X 1978 г.,—
после переработки — 20.III 1980 г.