УДК 517.9

Нгуен Донг Ань

Некоторые методы интегрирования уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова в теории случайных колебаний

В работе предложены два метода интегрирования уравнений Фоккера—Планка—Колмогорова (ФПК), имеющих важное значение в теории случайных колебаний (см. [1]).

1. Метод параметра управления. Сущность метода заключается в том, что введением некоторого параметра управления исследуемое уравнение ФПК заменяется другим уравнением в частных производных первого порядка. Параметр управления будет выбран так, чтобы последнее уравнение проинтегрировалось. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^n x}{dt^n} + f\left(\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}, \ldots, \frac{dx}{dt}, x\right) = \xi(t), \tag{1}$$

где $\xi(t)$ — «белый шум» с интенсивностью D. Соответствующее стационарное уравнение ФПК будет иметь вид

$$\frac{\partial W}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial W}{\partial \dot{x}}\ddot{x}+\ldots+\frac{\partial W}{\partial \overset{(n-2)}{x}}\overset{(n-1)}{x}-\frac{\partial (Wf)}{\partial \overset{(n-1)}{x}}-\frac{D}{2}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial \overset{(n-1)}{x}\,\partial \overset{(n-1)}{x}}=0. \tag{2}$$

Отсюда

$$e^P f=-\frac{D}{2}\frac{\partial P}{\partial \overset{(n-1)}{x}}e^P+\int^{\overset{(n-1)}{x}}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\dot{x}+\ldots+\frac{\partial P}{\partial \overset{(n-2)}{x}}\overset{(n-1)}{x}\right)e^P d\overset{(n-1)}{x}, \tag{3}$$

где

$$W=\exp\{P\},\quad \overset{(k)}{x}=\frac{d^k x}{dt^k}. \tag{4}$$

Введем параметр управления, связанный с P уравнением

$$\int^{\overset{(n-1)}{x}}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\dot{x}+\ldots+\frac{\partial P}{\partial \overset{(n-2)}{x}}\overset{(n-1)}{x}\right)e^P d\overset{(n-1)}{x}=e^P\Lambda(x,.,\overset{(n-1)}{x}) \tag{5}$$

или

$$\frac{\partial P}{\partial x}\dot{x}+\ldots+\frac{\partial P}{\partial \overset{(n-2)}{x}}\overset{(n-1)}{x}-\frac{\partial P}{\partial \overset{(n-1)}{x}}\Lambda=\frac{\partial \Lambda}{\partial \overset{(n-1)}{x}}. \tag{6}$$

Подставляя уравнения (5) в (3), получаем

$$f=-\frac{D}{2}\frac{\partial P}{\partial \overset{(n-1)}{x}}+\Lambda(x,.,\overset{(n-1)}{x}). \tag{7}$$

Параметр Λ должен быть выбран так, чтобы уравнение (6) проинтегрировалось. Пусть $n=3$ и

$$\Lambda(x,\dot{x}\,\ddot{x})=a(x)\,\dot{x}. \tag{8}$$

Тогда уравнение (6) будет иметь вид

$$\frac{\partial P}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial P}{\partial \dot{x}}\ddot{x}-\frac{\partial P}{\partial \ddot{x}}a(x)\dot{x}=0, \tag{9}$$

уравнения его характеристик —

$$\frac{dx}{\dot{x}}=\frac{d\dot{x}}{\ddot{x}}=-\frac{d\ddot{x}}{a(x)\,\dot{x}}. \tag{10}$$

Они допускают два независимых интеграла:

$$\ddot{x}+\int^x a(x)\,dx=\text{const},$$
$$\frac{\dot{x}^2}{2}-\left(\ddot{x}+\int^x a(x)\,dx\right)x+x\int^x a(x)\,dx-\int^x xa(x)\,dx=\text{const}. \tag{11}$$

Тогда общее решение уравнения (9) запишется в виде

$$P=-\frac{\alpha}{D}\dot{x}^2-\frac{\beta}{D}\ddot{x}^2+\left(\frac{2\alpha}{D}x-\frac{2\beta}{D}\int^x a(x)\,dx\right)\ddot{x}+\frac{2\alpha}{D}\int^x xa(x)\,dx-$$

$$-\frac{\beta}{D}\left(\int^{x} a(x)\,dx\right)^2-\frac{1}{D}\,\varphi\left(\ddot{x}+\int^{x} a(x)\,dx\right)-$$

$$-\frac{1}{D}\,\psi\left(\frac{\dot{x}^2}{2}-\left(\ddot{x}+\int^{x} a(x)\,dx\right)x+x\int^{x} a(x)\,dx-\int^{x} xa(x)\,dx\right).$$

Отсюда и из (7) получим

$$f=\beta\ddot{x}-\alpha x+\beta\int^{x} a(x)\,dx+a(x)\,\dot{x}+\frac{1}{2}\,\frac{d\varphi}{d\ddot{x}}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial\psi}{\partial\ddot{x}}\,. \tag{12}$$

Итак, получим следующую теорему.

Теорема 1. *Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение*

$$\dddot{x}+\beta\ddot{x}+a(x)\,\dot{x}-\alpha x+\beta\int^{x} a(x)\,dx+\frac{1}{2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\ddot{x}}\left(\ddot{x}+\int^{x} a(x)\,dx\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\ddot{x}}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}-\left(\ddot{x}+\int^{x} a(x)\,dx\right)x+x\int^{x} a(x)\,dx-\int^{x} xa(x)dx\right)=\xi(t), \tag{13}$$

где $\xi(t)$ — *«белый шум» с интенсивностью* D. *Тогда стационарное решение соответствующего уравнения ФПК будет равно*

$$W(x,\dot{x},\ddot{x})=h\exp\left\{-\frac{\alpha}{D}\,\dot{x}^2-\frac{\beta}{D}\,\ddot{x}^2+\left(\frac{2\alpha}{D}\,x-\frac{2\beta}{D}\int^{x} a(x)\,dx\right)\ddot{x}+\right.$$

$$+\frac{2\alpha}{D}\int^{x} xa(x)\,dx-\frac{\beta}{D}\left(\int^{x} a(x)\,dx\right)^2-\frac{1}{D}\,\varphi\left(\ddot{x}+\int a(x)\,dx\right)-$$

$$\left.-\frac{1}{D}\,\psi\left(\frac{\dot{x}^2}{2}-\left(\ddot{x}+\int^{x} a(x)\,dx\right)x+x\int^{x} a(x)\,dx-\int^{x} xa(x)\,dx\right)\right\}. \tag{14}$$

В частности при $a(x)=-\varepsilon+\varepsilon\gamma x^2$, $\varphi=\psi=0$ уравнение (13) будет иметь вид уравнения Ван-дер-Поля — Дуффинга:

$$\dddot{x}+\beta\ddot{x}-\varepsilon(1-\gamma x^2)\,\dot{x}-\left[(\alpha+\varepsilon\beta)\,x+\frac{\varepsilon\beta\gamma}{3}\,x^3\right]=\xi(t), \tag{15}$$

а соответствующее решение (14) —

$$W(x,\dot{x},\ddot{x})=h\exp\left\{-\frac{\beta}{D}\,\ddot{x}^2-\frac{\alpha}{D}\,\dot{x}^2+\frac{2}{D}\left[(\alpha+\varepsilon\beta)\,x-\frac{\varepsilon\beta\gamma}{3}\,x^3\right]\ddot{x}-\right.$$

$$\left.-\frac{\beta\varepsilon^2}{D}\,\dot{x}^2+\frac{\alpha\gamma}{D}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{2\varepsilon\beta}{3D}\right)x^4-\frac{\varepsilon^2\beta\gamma^2}{9D}\,x^6\right\}. \tag{16}$$

Детерминированное колебание в уравнении (15) изучено в работе [2].

2. Метод разложения в ряд Маклорена по обобщенной циклической координате. Рассмотрим уравнение

$$\overset{(n)}{x}+f(x,\dot{x},..,\overset{(n-1)}{x})=\xi(t), \tag{17}$$

где $\xi(t)$ — «белый шум» с интенсивностью D. Предположим, что для системы (17) обобщенной циклической координатой является $\overset{(n-1)}{x}$, причем разложение в ряд Маклорена по $\overset{(n-1)}{x}$ функции f имеет вид

$$f(x, \dot{x}, ., \overset{(n-1)}{x}) = \alpha \overset{(n-1)}{x} + B(x, \dot{x}, ., \overset{(n-2)}{x}), \tag{18}$$

где $\alpha > 0$, функция B пока еще не известна. Стационарное уравнение ФПК, соответствующее уравнению (17), с учетом (18) примет вид

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial W}{\partial x_i} x_{i+1} - \frac{\partial}{\partial x_n} [W(\alpha x_n + B)] - \frac{D}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x_n^2} = 0,$$

$$x_1 = x, ., x_n = \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} = \overset{(n-1)}{x}. \tag{19}$$

По методу разложения в ряд Маклорена циклическое решение уравнения (19) будем искать в виде

$$W = \exp\{\varphi_0(x_1, ., x_{n-1}) + \varphi_1(x_1, ., x_{n-1}) x_n + \varphi_2(x_1, ., x_{n-1}) x_n^2\}. \tag{20}$$

Подставляя (20) в уравнение (19), получаем систему для φ_0, φ_1, φ_2:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{n-1}} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n-1}} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} x_{i+1} - 2\alpha\varphi_2 - 2D\varphi_2^2 = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_{n-1}} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} x_{i+1} - \alpha\varphi_1 - 2\varphi_2 B - 2D\varphi_1\varphi_2 = 0, \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} x_{i+1} - \varphi_1 B - \alpha - D\varphi_2 - \frac{D}{2} \varphi_1^2 = 0,$$

условие совместности которой позволит определить конкретный вид функции B. Пусть $n = 3$, тогда система (21) примет вид

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \dot{x}} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \dot{x} - \varphi_1 B - \alpha - D\varphi_2 \frac{D}{2} \varphi_1^2 = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} - \alpha\varphi_1 - 2\varphi_2 B - 2D\varphi_1\varphi_2 = 0, \quad \frac{d\varphi_2}{dx} \dot{x} + \frac{\partial \varphi_1}{d\dot{x}} - 2\alpha\varphi_2 - 2D\varphi_2^2 = 0.$$

Интегрируя эту систему, получаем

$$\varphi_2 = -\frac{\alpha}{D}, \quad \varphi_1(x, \dot{x}) = \frac{2\alpha}{D} g_0(x), \quad \varphi_0(x, \dot{x}) = -\frac{\alpha\sigma}{2D} \dot{x}^4 + \left(\frac{2\alpha\sigma}{D} \int^x g_0(x) dx - \right.$$

$$\left. - \frac{2\alpha\mu}{D}\right) \dot{x}^2 - 2\frac{\alpha}{D} \Phi\left(\frac{\dot{x}^2}{2} - \int^x g_0(x)\, dx\right) - \frac{\alpha}{D} g_0^2(x) -$$

$$- \frac{2\alpha\sigma}{D} \left(\int^x g_0(x)\, dx\right)^2 + \frac{4\alpha\mu}{D} \int^x g_0(x)\, dx, \tag{23}$$

$$\sigma, \mu = \text{const}, \quad \sigma, \mu > 0,$$

$$B=\sigma\dot{x}^3-\left(\frac{dg_0}{dx}+2\sigma\int^x g_0(x)\,dx-2\mu\right)\dot{x}-\alpha g_0(x)+\frac{\partial\Phi(s)}{\partial s}\dot{x}.$$

Отсюда

$$W(x,\dot{x},\ddot{x})=h\exp\left\{-\frac{\alpha\sigma}{2D}\dot{x}^4+\left(\frac{2\alpha\sigma}{D}\int^x g_0(x)\,dx-\frac{2\alpha\mu}{D}\right)\dot{x}^2-\right.$$

$$-2\frac{\alpha}{D}\Phi\left(\frac{\dot{x}^2}{2}-\int^x g_0(x)\,dx\right)-\frac{\alpha}{D}g_0^2(x)-\frac{2\alpha\sigma}{D}\left(\int^x g_0(\dot{x})\,dx\right)^2+$$

$$\left.+\frac{4\alpha\mu}{D}\int^x g_0(x)\,dx+\frac{2\alpha}{D}g_0(x)\ddot{x}-\frac{\alpha}{D}\ddot{x}^2\right\}. \qquad (24)$$

Теорема 2. *Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение*

$$\dddot{x}+\alpha\ddot{x}+\sigma\dot{x}^3-\left(\frac{dg_0}{dx}+2\sigma\int^x g_0(x)\,dx-2\mu\right)\dot{x}-\alpha g_0(x)+\frac{\partial\Phi(s)}{\partial s}\dot{x}=\xi(t),\qquad (25)$$

где $s=\frac{\dot{x}^2}{2}-\int^x g_0(x)\,dx$, $\xi(t)$ — *«белый шум» с интенсивностью* D, $\Phi(s)$ — *произвольная дифференцируемая функция. Тогда стационарное решение соответствующего уравнения ФПК будет иметь вид (24).*

ЛИТЕРАТУРА

1. Митропольский Ю. А. Методы усреднения в нелинейной механике.— Киев: Наук. думка, 1971.— 440 с.
2. Нгуен Ван Дао. Нелинейные колебания в системах третьего порядка.— В кн.: III-я международная конференция по нелинейным колебаниям. Прага, 1978.

НЦНИ СРВ
Институт механики

Поступила в редакцию
28.IV 1980 г.