УДК 517.9

А. А. Панков

Почти переодические по Безиковичу решения эволюционных вариационных неравенств

Пусть V — рефлексивное банахово пространство* с сопряженным V' и H — гильбертово пространство, V непрерывно и плотно вложено в H. Нормы в V, H и V' обозначим через $\|\cdot\|$, $|\cdot|$ и $\|\cdot\|_*$ соответственно. Через $(\cdot, \cdot)$ обозначим скалярное произведение в H и каноническую билинейную форму на $V' \times V$. Пусть $A: V \to V'$ — некоторый, вообще говоря, нелинейный оператор и φ — собственная замкнутая выпуклая функция на V. Для заданной функции** $f \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}; V')$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, рассмотрим задачу [1, 2]

* Все банаховы пространства рассматриваются над полем вещественных чисел.

** Обозначения L^p, C и т. п. имеют обычный смысл.

отыскания такой функции $u(t) \in L^p_{\text{loc}}(\mathbf{R}; V) \cap C(\mathbf{R}; H)$, что

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} [(v' + A(u) - f, v - u) + \varphi(v) - \varphi(u)]\, dt \geqslant \frac{1}{2} [|v(t_2) - u(t_2)|^2 - \\ - |v(t_1) - u(t_1)|^2] \tag{1}$$

$$\forall t_1 < t_2,\ \forall v \in L^p_{\text{loc}}(\mathbf{R}; V), v' \in L^{p'}_{\text{loc}}(\mathbf{R}; V'), \varphi(v) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}).$$

Пусть $f(t)$ — почти периодическая функция со значениями в V' (определения и основные свойства см. в [3, 4]). При различных дополнительных предположениях установлено, что задача (1) имеет тогда S^p — почти периодическое в V решение, которое, как функция со значениями в H, почти периодично (см. [5—7]). Подставим в (1) такую почти периодическую функцию $v(t)$ со значениями в V, что $v'(t)$ и $\varphi(v)$ почти периодичны, и положим $t_2 = -t_1 = T$. Поделим (1) на $2T$ и перейдем к пределу при $T \to +\infty$. Тогда, поскольку правая часть неравенства (1) ограничена, получим $\mathbf{M}\{(v' + A(u) - f, v - u) + \varphi(v) - \varphi(u)\} \geqslant 0$, где $\mathbf{M}\{h\}$ — среднее значение функции h: $\mathbf{M}\{h\} = \lim\limits_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} h(t)\, dt$. Это позволяет ослабить постановку задачи (1) для почти периодических решений следующим образом.

Пусть $B^p(\mathbf{R}; V)$, $1 \leqslant p < \infty$, — пополнение пространства $\mathrm{Trig}(\mathbf{R}; V)$ тригонометрических полиномов вида $\sum a_k \exp(i\lambda_k t)$, $a_k \in V$, по норме $\|v\|_{B^p} = [\mathbf{M}\{\|v\|_V^p\}]^{1/p}$. При $p > 1$ это пространство рефлексивно и

$$[B^p(\mathbf{R}; V)]' = B^{p'}(\mathbf{R}; V'),\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Двойственность здесь задается билинейной формой $\langle u, v\rangle = \mathbf{M}\{(u, v)\}$. Пространство $B^p(\mathbf{R}; V)$ состоит из почти периодических по Безиковичу функций и канонически отождествляется с пространством $L^p(\mathbf{R}_B; V)$ на боровской компактификации $\mathbf{R}_B$ прямой [8] (интегрирование — по мере Хаара $d\mu$ на $\mathbf{R}_B$).

Напомним, что спектром $\mathrm{sp}(f)$ почти периодической функции называется множество тех точек $\xi \in \mathbf{R}_\xi$, для которых преобразование Фурье — Бора $f \to \hat{f}(\xi) = \mathbf{M}_t\{f(t)\exp(i\xi t)\}$ отлично от нуля. Множество $\mathrm{sp}(f)$ не более чем счетно. Пусть Γ — некоторое счетное множество характеров аддитивной группы $\mathbf{R}$. (Характеры отождествляются с точками прямой $\mathbf{R}_\xi$, поскольку все они имеют вид $\exp(i\xi t)$). Положим $B^p_\Gamma(\mathbf{R}; V) = \{f \in B^p(\mathbf{R}; V) \mid \mathrm{sp}(f) \subset \Gamma\}$. Это замкнутое подпространство в $B^p(\mathbf{R}; V)$. Для нас наиболее интересен случай, когда Γ — счетный модуль в $\mathbf{R}_\xi$ (т. е. аддитивная подгруппа в $\mathbf{R}_\xi$). Тогда $B^p(\mathbf{R}; V) = \bigcup B^p_\Gamma(\mathbf{R}; V)$, где объединение берется по всем счетным модулям Γ, содержащим данный счетный модуль Γ_0. По каждому счетному модулю Γ строится [8] боровская компактификация $\mathbf{R}_{B,\Gamma}$, являющаяся компактной метризуемой абелевой группой. При этом $B^p_\Gamma(\mathbf{R}; V) = L^p(\mathbf{R}_{B,\Gamma}; V)$. Модулем почти периодичности функции f называется минимальный счетный модуль, содержащий $\mathrm{sp}(f)$.

Оператор дифференцирования по t на почти периодических функциях Безиковича проще всего определить замыканием с пространства $\mathrm{Trig}(\mathbf{R}; V)$.

Пусть $A(t): V \to V'$, $t \in \mathbf{R}$, — такое семейство монотонных семинепрерывных операторов, что

$$\|A(t)v\|_* \leqslant C\|v\|^{p-1} + C_1 \quad \forall v \in V, \forall t \in \mathbf{R}, \tag{2}$$

множество $N \subset \mathbf{R}_{B,\Gamma}$ меры нуль и такая последовательность компактов $K_n \subset \mathbf{R}_{B,\Gamma} \setminus N$, что $\bigcup K_n = \mathbf{R}_{B,\Gamma} \setminus N$ и u — непрерывна на $\mathbf{R}_{B,\Gamma} \setminus N$. Так как K_n — метризуемые компакты, то существует счетное всюду плотное множество $\{t_n\}$ в $\mathbf{R}_{B,\Gamma} \setminus N$. Пусть W — замкнутая линейная оболочка точек $A(t_n)\,u(t_n)$ и $t \in \mathbf{R}_{B,\Gamma} \setminus N$. Тогда найдется последовательность $t_{n_i} \to t$. Имеем

$$A(t)\,u(t) - A(t_{n_i})\,u(t_{n_i}) = [A(t)\,u(t) - A(t)\,u(t_{n_i})] + \\ + [A(t)\,u(t_{n_i}) - A(t_{n_i})\,u(t_{n_i})].$$

Тогда первая скобка сходится к нулю слабо в V', а вторая — сильно (поскольку последовательность $u(t_{n_i})$ ограничена, а функция $A(t)\,v$ непрерывна равностепенно по v из ограниченных подмножеств V). Так как W слабо замкнуто, то $A(t)\,u(t) \in W \quad \forall t \in \mathbf{R}_{B,\Gamma} \setminus N$. Следовательно, $A(t)\,u(t)$ почти сепарабельнозначна и, тем самым, измерима. Поскольку всякая измеримая на $\mathbf{R}_B$ функция — прообраз измеримой функции на $\mathbf{R}_{B,\Gamma}$ (с некоторым счетным модулем $\Gamma \supset \Gamma_0$) при каноническом эпиморфизме $\mathbf{R}_B \to \mathbf{R}_{B,\Gamma}$, то $\mathbf{A}$ переводит измеримые функции в измеримые.

Из оценки (2) вытекает, что $\| A(t)\,v(t) \|_*^{p'} \leqslant C' \| v(t) \|^p + C_1'$, $t \in \mathbf{R}_B$. Следовательно, для $v \in B^p(\mathbf{R}; V)$ имеем $A(t)\,v(t) \in B^{p'}(\mathbf{R}; V')$ и $\| \mathbf{A}v \|_{B^{p'}(\mathbf{R};V')} \leqslant$ $\leqslant C'' \| v \|_{B^p(\mathbf{R};V)}^{p-1} + C_1''$. Тем самым $\mathbf{A}$ ограничен. Аналогично из (4) вытекает оценка $\langle \mathbf{A}v, v \rangle \geqslant \alpha' \| v \|_{B^p(\mathbf{R};V)}^p + \alpha_1'$, дающая коэрцитивность $\mathbf{A}$.

Докажем семинепрерывность оператора $\mathbf{A}$. Пусть $u, v, w \in B^p(\mathbf{R}; V)$. Покажем, что функция $\psi(\lambda) = \langle \mathbf{A}(u + \lambda v), w \rangle$ непрерывна по $\lambda \in \mathbf{R}$. Достаточно установить непрерывность в точке $\lambda_0 = 0$. Поскольку $\mathbf{A}$ — ограниченный оператор, то можно взять $w = w_0 \chi$, где $w_0 \in V$, а χ — характеристическая функция измеримого множества $M \subset \mathbf{R}_{B,\Gamma}$ для некоторого $\Gamma \supset \Gamma_0$. По той же причине найдется такое компактное множество $K \subset$ $\subset \mathbf{R}_{B,\Gamma}$, что

$$\int\limits_{\mathbf{R}_{B,\Gamma} \setminus K} \| A(t)\,(u(t) + \lambda v(t)) \|_*^{p'} d\mu(t) < \varepsilon, \ |\lambda| \leqslant 1,$$

а функции $u(t)$ и $v(t)$ непрерывны на K. Выбирая подходящую δ-сеть в K (K — метризуемый компакт) и используя равностепенную относительно ограниченных множеств изменения $v \in V$ непрерывность функций $A(t)\,v$, $t \in \mathbf{R}_{B,\Gamma}$, можно с любой точностью аппроксимировать $\mathbf{A}(u + \lambda v)$ в $L^{p'}(K; V')$ такими функциями $F(t, \lambda)$, что $F(t, \lambda) = A(t_i)\,(u(t) + \lambda v(t))$, $t \in U_i$, $t_i \in U_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, где $\bigcup U_i = K$ с точностью до множества меры нуль (в $\mathbf{R}_{B,\Gamma}$). Но так как $A(t_i)$ непрерывен как оператор из V с сильной топологией в V' со слабой топологией, то $F(t, \lambda)$ измерима по (t, λ) и при $t \in U_i$, $|\lambda| \leqslant 1$ слабо непрерывна по (t, λ). Тогда $\int\limits_{U_i \cap M} (F(t, \lambda), w_0)\, d\mu(t)$ непрерывен по λ ввиду теоремы Лебега. Отсюда вытекает семинепрерывность $\mathbf{A}$, поскольку $\left| \langle \mathbf{A}(u + \lambda v), w \rangle - \int\limits_{K \cap M} (F(t, \lambda), w_0)\, d\mu(t) \right| < C\varepsilon$, где $C > 0$ зависит только от $\mathbf{A}, u, v, w$, а ε произвольно.

Последнее утверждение леммы тривиально. Таким образом, лемма и, вместе с ней, теорема 1 доказаны.

Замечание. Из доказательства следует, что в предположениях теоремы 1 всегда существует почти периодическое по Безиковичу решение задачи (3), для которого модуль почти периодичности лежит в общем модуле почти периодичности Γ функций $A(t)$ и $f(t)$. Действительно, всюду выше можно заменить пространства B^r, $r = p, 2, p'$, пространствами B_Γ^r.

Рассмотрим вопрос о регулярности решений задачи (3). Для $1 \leqslant r \leqslant \infty$, $0 < \theta < 1$ определим пространства $B^p_{r,\theta}(\mathbf{R}; V) = \{v \in B^p(\mathbf{R}; V) \mid \| v \|_{p,r,\theta} < \infty\}$, где

$$\| v \|_{p,r,\theta} = \begin{cases} \left[\int\limits_0^1 s^{-r\theta} \| v(t-s) - v(t) \|^r_{B^p} \frac{ds}{s} \right]^{1/r} + \| v \|_{B^p}, & 1 \leqslant r < \infty, \\ \sup\limits_{s \in (0,1)} s^{-\theta} \| v(t-s) - v(t) \|_{B^p} + \| v \|_{B^p}, & r = \infty. \end{cases}$$

Определим также пространство $B^p_1(\mathbf{R}; V) = \{v' \in B^p(\mathbf{R}; V) | v' \in B^p(\mathbf{R}; V)\}$ с нормой графика.

Теорема 2. *Пусть в предположениях теоремы 1 дополнительно выполняются оценки*

$$(A(t)v - A(t)w, v - w) \geqslant \alpha \| v - w \|^q (1 + \| v \| + \| w \|)^{p-q}, \quad \forall v, w \in V, \ t \in \mathbf{R}, \tag{6}$$

$$\| A(t-s)v - A(t)v \|_* \leqslant C s^\gamma \| v \|^{p-1}, \ \forall v \in V, \ t \in \mathbf{R}, \ s \geqslant 0, \tag{7}$$

где $q \geqslant 2$, $0 < \gamma \leqslant 1$. Тогда для любого $f \in B^{p'}_{r,\theta}(\mathbf{R}; V')$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, $0 < \theta < \gamma$, единственное решение неравенства (3) *лежит в пространстве $B^p_{l,\eta}(\mathbf{R}; V)$, где $l = r(q-1)$, $\eta = \theta(q-1)^{-1}$.*

Эта теорема вытекает из результатов работы [9]. Действительно, пусть $\mathbf{V} = B^p(\mathbf{R}; V)$, $\mathbf{H} = B^2(\mathbf{R}; H)$, $\mathbf{V}' = B^{p'}(\mathbf{R}; V')$. Тогда для группы $G(s)$ правых сдвигов сопряженная группа $G^*(s)$ будет группой левых сдвигов и, значит, $G^*(s) = G^{-1}(s)$. Следовательно, условие а) теоремы 1 [9] выполняется тривиально с $\rho = \frac{1}{2}$. Условие б) той же теоремы немедленно следует из оценки (7), а оценка (2) [9] — из (6).

Из теоремы регулярности Брезиса [10] (см. также [1, гл. 2, § 9]) вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть в предположениях теоремы* 2 $q = 2$, $\gamma = 1$. *Тогда для $f \in B^{p'}_1(\mathbf{R}; V')$ решение $u(t)$ задачи* (3) *лежит в пространстве $B^p_1(\mathbf{R}; V)$ и*

$$\langle u' + \mathbf{A}(u) - f, v - u \rangle + \Phi(v) - \Phi(u) \geqslant 0 \ \ \forall v \in B^p(\mathbf{R}; V) \cap B^2(\mathbf{R}; H).$$

Замечания. 1. В работах [1, 10] теорема Брезиса доказана только в случае, когда Φ — индикаторная функция выпуклого замкнутого множества, однако это доказательство немедленно распространяется на общий случай. 2. Для линейных эволюционных уравнений аналогичные результаты совершенно иными методами получены в работе [11]. 3. Результаты настоящей работы автоматически дают теоремы существования и регулярности решений для периодических вариационных неравенств. 4. По поводу конкретных односторонних задач, к которым применимы приведенные выше результаты, см. работы [1, 2, 12]. 5. В менее общей форме результаты настоящей работы анонсированы в [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М.: Мир, 1972.— 587 с.
2. Brezis H. Problémes unilateraux.— J. Math. Pure Appl., 1972, 51, N 1, p. 1—168.
3. Левитан Б. М. Почти периодические функции.— М.: Гостехиздат, 1953.— 396 с.
4. Amerio L., Prouse G. Almost periodic functions and functional equations.— N. York: Van Nostrand, 1971.— 183 p.
5. Biroli M. Solutions presque périodiques des inéquations d'évolution paraboliques.— Ann. Matem. Pura Appl., 1971, 88, p. 31—70.

6. B i r o l i M. Sur les solutions bornées ou presque périodiques des équations d'évolution multivoques sur un espace de Hilbert.— Ric. Matem., 1972, **21**, p. 17—47.
7. П а н к о в А. А. Ограниченные и почти периодические решения эволюционных вариационных неравенств.— Мат. сборник, 1979, **108**, N 4, с. 551—566.
8. Х ь ю и т т Э., Р о с с К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1.— М.: Наука, 1975.— 654 с.; Т. 2.— М.: Мир, 1975.— 901 с.
9. П а н к о в А. А. Регулярность решений абстрактных вариационных неравенств.— Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 5, с. 683—686.
10. B r e z i s H. Équations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité.— Ann. Inst. Fourier, 1968, **18**, p. 115—175.
11. П а н к о в А. А. О почти периодических решениях эволюционных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1978, **14**, № 6, с. 1140—1143.
12. D u v a u t C., L i o n s J. L. Les inéquations en Physiques et en Méchaniques.— Paris: Dunod, 1972.— 387 p.
13. П а н к о в А. А. О почти-периодических решениях эволюционных вариационных неравенств.— ДАН СССР, 1978, **241**, № 2, с. 286—289.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редакцию
4.I 1978 г.