УДК 517.911

Л. Г. Просенюк

Существование и асимптотическое поведение решений вещественной системы дифференциальных уравнений вблизи особой точки

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$B_i(t, x_1, \dots, x_n)\, x_i' = A_i(t, x_1, \dots, x_n) + a_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

где B_i, A_i, a_i — вещественные функции, непрерывные в некоторой $(n+1)$-мерной области D, гомеоморфной конусу с вершиной в точке $O(0, \dots, 0)$, O — особая точка системы.

В статье изучается вопрос о существовании решений системы (1), обладающих свойством: $x_i(t) \to 0$ при $t \to 0$.

Аналогичная задача решалась и в других работах, например в [1, 2]. В частности, в [1] было указано необходимое и достаточное условие разрешимости сингулярной задачи Само по себе это условие трудно проверить, поэтому в статье для его проверки дается достаточный признак (см. следствие в [1, с. 1274]). Однако, например, для уравнения $t^3x' = x - t^{-1}x^3 \sin x$ условия упомянутого следствия не выполнены и, следовательно, как поступать далее не ясно. Доказанная же ниже теорема позволяет изучить некоторые из таких случаев Помимо этого, в отличие от [1], мы не только доказываем существование решений, но и указываем их оценку.

По сравнению с [2], здесь не требуется существования частных производных от функций, входящих в систему (1).

Сформулируем основной результат наших исследований.

Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *можно указать функции* $\omega_i(t) \in C^1(0, t_0)$, $\omega_i(t) > 0$, $\omega_i'(t) > 0$, $\omega_i(+0) = 0$ *такие, что для произвольно взятых чисел* $c_i > 0$ $(i = \overline{1, n})$ *область* $Q = \{(t, x_1, \dots, x_n) : 0 < t < t_0, |x_i| < c_i\omega_i^{\frac{1}{2}}(t)\}$ *при достаточно малом* t_0 *принадлежит* D. *Пусть в этой области:*

1) *функции* B_i *представимы в виде* $B_i = b_i(t)\, B_i^0(t, x_1, \dots, x_n)$, $b_i(+0) = 0$, *где* $b_i(t) > 0$, $B_i^0 \to 1$, $t \to 0$;

2) $A_i(t, x_1, \dots, x_n) x_i = \begin{cases} \geqslant 0, & i = \overline{1, n_1}, \\ \leqslant 0, & i = \overline{n_1+1, n}, \end{cases}$ *причем* $|A_s(t, x_1, \dots, x_n) \times$ $\times x_s| \geqslant d_s |x_s|^{k_s}$, $s = \overline{1, n_2}$, $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n$, $\omega_s'(t) b_s(t) = o(\omega_s(t))$, $t \to 0$.

Если, кроме того, при $t \to 0$ *в* Q *имеют место соотношения* $a_s(t, x_1, \dots, x_n) = o(\omega_s^{\frac{1}{2}(k_s-1)}(t))$, $s = \overline{1, n_2}$, $|a_i(t, x_1, \dots, x_n)| < \frac{1}{2} b_i(t) \omega_i'(t) \omega_i^{-\frac{1}{2}}(t)$, $i = \overline{n_2+1, n}$, *то существует* (n_1)*-параметрическое семейство решений системы* (1), *лежащих при малых* t *в этой области.*

Доказательство. Пусть $Q^0 = \{(t, x_1, \dots, x_n) : 0 < t < t_1,\ x_j^2 - c_j^2 \omega_j(t) \equiv u_j < 0,\ x_m^2 - c_m^2 \omega_m(t) \equiv v_m < 0\}$ $(j = \overline{1, n_1},\ m = \overline{n_1+1, n})$. Докажем, что каждая точка выхода из множества Q^0 — точка строгого выхода. Для этого сначала покажем, что Q^0 является (u, v)-подмножеством (см. [3, с. 335]) относительно системы (1), определяемым функциями u_j, v_m, $u_0 = t - t_1$.

Пусть U, U_α, V_β означают множества

$$U = \{(t, x_1, \dots, x_n) : u_0 = 0,\ u_j \leqslant 0,\ v_m \leqslant 0\},\ U_\alpha = \{(t, x_1, \dots, x_n) : u_\alpha = 0,$$
$$u_j \leqslant 0,\ v_m \leqslant 0,\ j \neq \alpha\},\quad V_\beta = \{(t, x_1, \dots, x_n) : v_\beta = 0,\ u_j \leqslant 0,\ v_m \leqslant 0,$$
$$m \neq \beta\}.$$

Найдем $\dot{u}_0$, $\dot{u}_\alpha$, $\dot{v}_\beta$ — производные вдоль траекторий системы (1). Имеем

$$\dot{u}_0 = 1,\ \dot{u}_\alpha = 2(A_\alpha(t, x_1, \dots, x_n) x_\alpha + a_\alpha(t, x_1, \dots, x_n) x_\alpha) B_\alpha^{-1}(t, x_1 \dots, x_n) -$$
$$- c_\alpha^2 \omega_\alpha'(t),\quad \dot{v}_\beta = 2(A_\beta(t, x_1, \dots, x_n) x_\beta + a_\beta(t, x_1, \dots, x_n) x_\beta) B_\beta^{-1}(t, x_1, \dots, x_n) -$$
$$- c_\beta^2 \omega_\beta'(t).$$

Учитывая условия теоремы, легко можно показать, что существует число $t_1 > 0$, при котором $\dot{u}_\alpha > 0$, $(t, x_1, \dots, x_n) \in U_\alpha$, $\dot{v}_\beta < 0$, $(t, x_1, \dots, x_n) \in V_\beta$. Эти неравенства и доказывают, что Q^0 — (u, v)-подмножество. В этом случае согласно лемме (см. [3, с. 336]) все точки выхода из Q^0 являются точками строгого выхода.

Изменим направление оси t на противоположное. Относительно новой системы координат множество Q^0, очевидно, обладает тем же свойством. Причем в силу упомянутой леммы все точки строгого выхода из него образуют множество $Q_1^0 = \bigcup\limits_{\beta=n_1+1}^{n} V_\beta \setminus \bigcup\limits_{\alpha=1}^{n_1} U_\alpha$.

Пусть $S \subset Q^0 \cup Q_1^0$, $S = \{(t, x_1^0, \dots, x_{n_1}^0, x_{n_1+1}, \dots, x_n) : (x_j^0)^2 < c_j^2 \omega_j(t_1),$ $j = \overline{1, n_1},\ x_m^2 \leqslant c_m^2 \omega_m(t_1),\ m = \overline{n_1+1, n}\}$. Тогда

$$S \cap Q_1^0 = \{(t_1, x_1^0, \dots, x_{n_1}^0, x_{n_1+1}, \dots, x_n) : (x_j^0)^2 < c_j^2 \omega_j(t_1),\quad j = \overline{1, n_1},$$
$$x_\beta^2 = c_\beta^2 \omega_\beta(t_1),\ x_m^2 \leqslant c_m^2 \omega_m(t_1),\ m \neq \beta,\ m, \beta = \overline{n_1+1, n}\}.$$

Ясно, что множество $S \cap Q_1^0$ образует границу S и не является ретрактом S. Последний факт вытекает из утверждения (3.6) работы [4].

Докажем, что $S \cap Q_1^0$ — ретракт Q_1^0. Для этого рассмотрим отображение

$$\pi : (t, x_1, \dots, x_n) \in Q_1^0 \to \left(t_1, x_1^0, \dots, x_{n_1}^0, \dots, x_m \left(\frac{\omega_m(t_1)}{\omega_m(t)}\right)^{\frac{1}{2}}, \dots, \right),\quad m = \overline{n_1+1, n}.$$

Оно действует из Q_1^0 в $S \cap Q_1^0$ и является непрерывным отображением. Кроме того, при этом отображении любая точка множества $S \cap Q_1^0$ переходит в себя. Значит, $S \cap Q_1^0$ — ретракт Q_1^0.

Нетрудно увидеть, что выполнены все условия следствия из теоремы Важевского (см. [3 с. 337]). Следовательно, существует решение системы (1) с начальными данными из $S \cup Q_1^0$, график которого на интервале $(0, t_1)$ будет находиться в Q^0. Так как постоянные $x_1^0, \dots, x_{n_1}^0$ можно варьировать в пределах $(x_j^0)^2 < c_j^2 \omega_j(t_1)$, $j = \overline{1, n_1}$, то и решений, лежащих в Q^0, получим целое семейство, зависящее от n_1 параметров. Теорема доказана.

С помощью этой теоремы часто удается изучить асимптотическое поведение решений сингулярных систем.

Проиллюстрируем сказанное на примере системы

$$m_i(t) x_i' = h_i(t) x_i + \sum_{k_1+\dots+k_n=2}^{N} h_{ik_1\dots k_n}(t) x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} +$$

$$+ h_{i1}(t) + P_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Здесь m_i, h_i, h_{i1}, $h_{ik_1\dots k_n}$ непрерывны и ограничены на интервале $(0, t_0)$, $h_i(+0) = \mathrm{const} \neq 0$, $m_i(+0) = 0$, P_i непрерывны по всем переменным в некоторой области D, гомеоморфной конусу с вершиной в начале координат.

Систему (2), у которой все $P_i \equiv 0$, будем называть укорочением исходной системы. Набор функций вида $\left\{R_i(t) = \sum_{j=0}^{N_i} \mu_{ij}(t) u_{ij}(t), \quad i = \overline{1, n}\right\}$ будем называть асимптотическим решением укорочения, если $u_{ij} \in C^1(0, t_0)$, $u_{ij+1} u_{ij}^{-1} = o(1)$, $t \to 0$, $|\mu_{ij}| < \infty$, $|\mu_{ij}'| < \infty$, $u_{ij}(+0) = 0$, $|u_{ij}'| < \infty$ и при подстановке этих функций вместо x_i в укорочение разность между левой и правой частью полученного формального равенства есть величина порядка $o(u_{iN_i}(t))$ при $t \to 0$.

Лемма. *Пусть:* 1) $b(t) \in C^{m+2}(0, t_0)$, $m \geqslant 0$, $b(t) > 0$, $b'(t) > 0$, $b(+0) = 0$, $m_i(t) = \alpha_i(t) b^{r_i}(t)$, $h_{i1}(t) = \nu_i(t) b^r(t)$, $r_i \geqslant 2$, $r \geqslant 1$;

2) $\alpha_i(t)$, $\nu_i(t)$, $h_i(t)$, $h_{ik_1\dots k_n}(t) \in C^{m+1}(0, t_0)$ *и все производные, до* $(m+1)$*-го порядка включительно, от этих функций ограничены на интервале* $(0, t_0)$.

Тогда укорочение системы (2) *имеет асимптотическое решение, представимое в виде*

$$\left\{R_i(t) = \sum_{j=0}^{m+1} c_{ij}(t) b^{r+j}(t), \quad i = \overline{1, n}\right\}, \tag{3}$$

где $c_{ij} \in C^1$, $|c_{ij}| < \infty$.

Доказательство. Будем искать асимптотическое решение укорочения в виде (3), где c_{ij} пока неизвестны, а вместо $m+1$ стоит некоторое число T. Подставим его в укорочение. Получим

$$\sum_{j=0}^{T} (\alpha_i(t) c_{ij}'(t) b^{r+r_i+j}(t) + \alpha_i(t) c_{ij}(t) b'(t) b^{r+r_i+j-1}(t)) =$$

$$= h_i(t) \sum_{j=0}^{T} c_{ij}(t) b^{r+j}(t) + \nu_i(t) b^r(t) +$$

$$+ \sum_{k_1+\dots+k_n=2}^{N} h_{ik_1\dots k_n}(t) \left(\sum_{j=0}^{T} c_{i1}(t) b^{r+j}(t)\right)^{k_1} \dots \left(\sum_{j=0}^{T} c_{in}(t) b^{r+j}(t)\right)^{k_n}.$$

Приравнивая члены слева и справа при $b^{r+p}(t)$, p — целое, $0 \leqslant p \leqslant T$, получаем равенства

$$\alpha_i(t)\, c'_{ip-r_i}(t) + \alpha_i(t)\, c_{ip-r_i+1}(t)\, b'(t) = h_i(t)\, c_{ip}(t) +$$
$$+ H_i(h_{ik_1\ldots k_n}, c_{10}, \ldots, c_{1p-1}, \ldots, c_{n0}, \ldots, c_{np-1}, \nu_i). \tag{4}$$

Здесь H_i — некоторые многочлены от своих аргументов.

Учитывая условия нашей леммы, легко заметить, что из (4) можно определить все $c_{ip}(t)$, $0 \leqslant p \leqslant m+1$, причем $|c_{ij}| < \infty$, $|c'_{ij}| < \infty$, $j = \overline{0, m}$. Положим $T = m + 1$. Тогда из построения набора $\{R_i(t)\}$ вытекает, что он будет асимптотическим решением укорочения. Лемма доказана.

Систему (2) будем рассматривать далее в области $\Omega = \{0 < t < t_0,$ $|x_i - R_i(t)| < b^{r+m+1}(t)$, $i = \overline{1, n}\}$. Обозначим через l число положительных значений среди $h_i(+0)$.

Теорема 2. *Пусть для системы* (2) *выполнены условия предыдущей леммы и* $\Omega \subset D$. *Тогда, если имеют место соотношения* $P_i(t, x_1, \ldots, x_n) = o(b^{r+m+1}(t))$, $t \to 0$, $(t, x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, *то существует l-параметрическое семейство решений системы* (2), *лежащих при малых t в области* Ω.

Доказательство. В системе (2) сделаем замену $x_i = R_i(t) + z_i$, $i = \overline{1, n}$. Полученную систему запишем в удобном для нас виде

$$m_i(t)\, z'_i = h_i(t)\, z_i + (h_i(t)\, R_i(t) + h_{i1}(t) - m_i(t)\, R'_i(t) +$$
$$+ \sum_{k_1+\ldots+k_n=2}^{N} h_{ik_1\ldots k_n}(t)\, R_1^{k_1}(t), \ldots, R_n^{k_n}(t)) + \sum_{k_1+\ldots+k_n=2}^{N} h_{ik_1\ldots k_n}(t) \times$$
$$\times \left(\prod_{j=1}^{n} (z_j + R_j(t))^{k_j} - \prod_{j=1}^{n} R_j^{k_j}(t) \right) + P_i(t, R_1(t) + z_1, \ldots, R_n(t) + z_n). \tag{5}$$

Обозначим $h_i(t)\, z_i \equiv A_i(t, z_1, \ldots, z_n)$, а через $a_i(t, z_1, \ldots, z_n)$ — все остальные слагаемые в правой части системы (5). Положим, далее, $\omega_i(t) = b^{2(r+m+1)}(t)$. Тогда легко убедиться, что выполнены все условия предыдущей теоремы, из которой и следует наш результат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кигурадзе И. Т. О задаче Коши для сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1965, 1, № 10, с. 1271—1291.
2. Чечик В. А. Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью.— Тр. Моск. мат. об-ва, 1959, т. 8, с. 155—198.
3. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1970.— 720 с.
4. Борсук К. Теория ретрактов.— М.: Мир, 1971.— 291 с.

Одесский
государственный университет

Поступила в редакцию 21.IV 1979 г.;
после переработки — 28.II 1980 г.