УДК 51:62—50

Б. Н. Пшеничный, В. Н. Гуров

О необходимых условиях экстремума на выпуклых дифференциальных включениях с фазовыми ограничениями

Метод нахождения необходимых условий для рассматриваемой ниже задачи основывается на идеях работы [1], но не является ее формальным следствием. Обозначения соответствуют работе [2].

Рассмотрим следующую задачу:

$$\varphi(x(1)) + \int_0^1 f(t, x(t))\,dt \to \min, \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) \in a(t, x(t)) \text{ п. в. }^{*)},\ x(0) = x^0, \tag{2}$$

$$x(t) \in G(t), \tag{3}$$

где f — нормальный выпуклый интегрант (в соответствии с [3], [4]), $a(t, x)$ измеримое по t, выпуклое по x, суммируемо ограниченное (в окрестности решения x_0) многозначное отображение, $G(t)$ — выпуклозначное вполне полунепрерывное снизу (см. [1, 5]) многозначное отображение, $\operatorname{int} G(t) \neq \varnothing$, φ — выпуклая ограниченная функция.

Теорема 1. *Если $x_0(\cdot)$ — решение задачи* (1), (2), *и* $x_0(t) \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f(t, \cdot)$ *при всех t, то найдется абсолютно непрерывная функция $x^*(\cdot)$, для которой выполняются следующие условия:*

$$x^*(1) \in \partial\varphi(x_0(1)),\quad -\dot{x}^*(t) \in \partial x W_{a(t,\cdot)}(x_0(t), x^*(t)) + \partial f(t, x_0(t)) \text{ п. в.},$$

$$\langle \dot{x}_0(t), x^*(t)\rangle = W_{a(t,\cdot)}(x_0(t), x^*(t)) \text{ п. в.}, \tag{4}$$

где $W_{a(t,\cdot)}(x, y^*) = \min\limits_{y \in a(t,x)} \langle y, y^*\rangle$.

Теорема 1 следует, например, из [6, 7] и в автономном виде доказана в [2]. Необходимые условия теоремы 1 можно переписать и в другой форме:

$$x^*(1) \in \partial\varphi(x_0(1)),\quad (-\dot{x}^*(t), -x^*(t)) \in N_{a(t,\cdot)}(x_0(t), \dot{x}_0(t)) + (\partial f(t, x_0(t)), 0), \tag{5}$$

где $N_{a(t,\cdot)}(x_0(t), \dot{x}_0(t))$ — нормальный конус к $\operatorname{gf} a(t,\cdot)$ в точке $(x_0(t), \dot{x}_0(t))$, т. е. $N_{a(t,\cdot)}(x_0(t), \dot{x}_0(t)) = -K^*_{a(t,\cdot)}(x_0(t), \dot{x}_0(t))$, где $K_{a(t,\cdot)}(x_0(t), \dot{x}_0(t))$ — конус допустимых направлений к тому же множеству в той же точке.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\varphi(x(1)) + \int_0^1 f(t, x(t), \dot{x}(t))\,dt \to \min;\quad \dot{x}(t) \in a(t, x(t)) \text{ п. в.},\ x(0) = x^0, \tag{6}$$

где f — нормальный выпуклый интегрант, предположения относительно многозначного отображения a остаются прежними.

Предположение А. Существует такое решение z_1 дифференциального включания (2), что для некоторого $\delta > 0$ $(z_1(t), \dot{z}_1(t)) + \delta S_1 \times S_1 \subseteq \operatorname{dom} f(t, \cdot, \cdot)$ (S_1 — единичная сфера в R^n).

---

* Здесь и далее п. в. означает сокращение записи «для почти всех $t \in [0,1]$».

Теорема 2. *Если $z(\cdot)$ — решение задачи* (6), $(z(t), \dot z(t)) \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f(t, \cdot, \cdot)$ *при всех t, и выполнено предположение A, то найдется такая абсолютно непрерывная функция $x^*(\cdot)$, для которой выполняется*:

$$x^*(1) \in \partial\varphi(z(1)), \quad (\dot x^*(t), x^*(t)) \in K^*_{a(t,\cdot)}(z(t), \dot z(t)) - \partial_{(x,y)} f(t, z(t), \dot z(t)) \text{ п. в.}$$

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу:

$$\varphi(x(1)) + x_0(1) \to \min, \quad (x, x_0, \dot x, \dot x_0) \in \operatorname{gf} a_1(t, \cdot, \cdot), \quad (x(0), x_0(0)) = (x^0, 0),$$

$$(x, x_0, \dot x, \dot x_0) \in \Gamma(t), \tag{7}$$

где $a_1(t, x, x_0) = a(t, x) \times R^1$ $\Gamma(t) = \{(x, x_0, y, y_0)\colon \ y_0 \in R^1, \ (x, y, y_0) \in \operatorname{epi} f(t, \cdot, \cdot)\}$.

Задачу (7) можно записать в виде

$$\varphi(x(1)) + x_0(1) \to \min, \quad (\dot x, \dot x_0) \in b(t, x, x_0), \quad (x(0), x_0(0)) = (x^0, 0), \tag{8}$$

где $b(t, x, x_0)$ — выпуклое по совокупности аргументов x, x_0 многозначное отображение такое, что $\operatorname{gf} b(t, \cdot, \cdot) = \operatorname{gf} a_1(t, \cdot, \cdot) \cap \Gamma(t)$. Для $x(\cdot)$ обозначим $x_0(t) = \int\limits_0^t f(t, x(t), \dot x(t))\, dt$.

Утверждение 1. *Если $z(\cdot)$ — решение задачи* (8), *то* $\left(z(t), \int\limits_0^t f(t, z(t), \dot z(t))\, dt\right)$ — *решение задачи* (8).

В самом деле. Пусть существует решение (z', z_0') задачи (6) такое, что $\varphi(z'(1)) + z_0'(1) < \varphi(z(1)) + \int\limits_0^1 f(t, z, \dot z)\, dt$. Из условий задачи (8) получаем, что $\dot z' \in a(t, z')$, $z'(0) = x^0$, $\dot z_0'(t) \geqslant f(t, z', \dot z')$, $z_0'(0) = 0$, и, следовательно, $z_0'(1) \geqslant \int\limits_0^1 f(t, z', \dot z')\, dt$, что противоречит оптимальности z в задаче (6).

Имеет место и обратное утверждение. Таким образом, задачи (6) и (8) эквивалентны.

Без ограничения общности, в силу того, что множество решений дифференциального включения (2) компактно, а значение функционала (1) в окрестности решения ограничено, многозначное отображение b также можно считать ограниченным. Тогда задача (8) находится в условиях теоремы 1.

Поэтому если (z, z_0) — оптимальное решение задачи (8), то найдется абсолютно непрерывная функция (x^*, x_0^*), для которой выполняется: $(\dot x^*, \dot x_0^*, x^*, x_0^*) \in K^*_{\operatorname{gf} b(t,\cdot,\cdot)}(z, z_0, \dot z, \dot z_0)$ п. в. Из определения многозначного отображения b имеем $K^*_{\operatorname{gf} b(t,\cdot,\cdot)}(\cdot) = (K_{\operatorname{gf} a_1(t,\cdot,\cdot)}(\cdot) \cap K_{\Gamma(t)}(\cdot))^* = K^*_{\operatorname{gf} a_1(t,\cdot)}(\cdot) + K^*_{\Gamma(t)}(\cdot)$ (справедливость последнего равенства вытекает из предположения A, обеспечивающего то, что $K_{\operatorname{gf} a_1(t,\cdot)} \cap \operatorname{int} K_{\Gamma(t)}(\cdot) \neq \varnothing$). Очевидно, что $K_{\operatorname{gf} a_1(t,\cdot,\cdot)}(x, x_0, y, y_0) = \{(\bar x, \bar x_0, \bar y, \bar y_0)\colon (\bar x, \bar y) \in K_{a(t,\cdot)}(x, y), \ \bar x_0, \bar y_0 \in R^1\}$. Поэтому $K^*_{\operatorname{gf} a_1(t,\cdot)}(x, x_0, y, y_0) = \{(x^*, 0, y^*, 0), \ \text{где} \ (x^*, y^*) \in K^*_{a(t,\cdot)}(x, y).\}$. Несложно показать, что $K_{\Gamma(t)}(x, x_0, y, y_0) = \{(\bar x, \bar x_0, \bar y, \bar y_0) : \bar x_0 \in R^1, \ \bar y_0 \geqslant h(t, x, y, \bar x, \bar y)\}$, где $h(t, x, y, \bar x, \bar y) = \lim\limits_{\lambda \downarrow 0} [f(t, x + \lambda \bar x, y + \lambda \bar y) - f(t, x, y)]/\lambda$.

При наших предположениях функция h является однородной, замкнутой, выпуклой по $\bar{x}, \bar{y}$. Имеет место равенство $h(t, x, y, \bar{x}, \bar{y}) = \sup\limits_{(v,w)\in\partial_{x,y}b(t,x,y)} \langle (v, w), (\bar{x}, \bar{y})\rangle$, где $\partial_{x,y}f(t, x, y)$ — выпуклое компактное множество субдифференциалов функции f по обоим аргументам. $(x^*, x_0^*, y^*, y_0^*) \in K^*_{\Gamma(t)}(x, x_0, y, y_0)$ в том и только том случае, если для всех $\bar{y}_0 \geqslant h(t, x, y, \bar{x}, \bar{y})$, $\bar{x}_0 \in R^1$ имеем

$$\langle \bar{x}, x^*\rangle + \langle \bar{x}_0, x_0^*\rangle + \langle \bar{y}, y^*\rangle + \langle \bar{y}_0, y_0^*\rangle \geqslant 0. \tag{9}$$

Отсюда следует, что $x_0^* = 0$, $y_0^* \geqslant 0$. Соотношение (9) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\langle (\bar{x}, \bar{y}), (x^*, y^*)\rangle + y_0^* \sup_{(v,w)\in\partial_{x,y}f(t,x,y)} \langle (\bar{x}, \bar{y}), (v, w)\rangle \geqslant 0. \tag{10}$$

Поскольку неравенство (10) справедливо при всех $(\bar{x}, \bar{y}) \in R^n \times R^n$, то отсюда следует, что $(x^*, y^*) \in -y_0^*\partial_{x,y}f(t, x, y)$. Таким образом, получаем $(\dot{x}^*(t), x^*(t)) \in K^*_{\mathrm{gfa}(t,\cdot)}(z(t), \dot{z}(t)) - \partial_{x,y}f(t, z(t), \dot{z}(t))$ п. в., $x^*(1) \in \partial\varphi_0(x_0(1))$, что и доказывает теорему 2.

Вернемся к задаче (1), (2), (3). Обозначим через I функционал (1), через $\mathfrak{X}$ — множество решений дифференциального включения (2) (оно выпукло), через S — множество $\{x : x \in C_n[0, 1], \ x(t) \in G(t)\}$. Условие полной полунепрерывности снизу многозначного отображения G обеспечивает то, что $S^0 = \operatorname{int} S = \{x : x \in C_n[0, 1], \ x(t) \in \operatorname{int} G(t)\} \neq \varnothing$.

Предположение Б. Существует $x \in S^0 \cap \mathfrak{X}$, для которого $I(x) < +\infty$.

Рассмотрим два выпуклых множества: $A_1 = \{(x, \delta) : x \in \mathfrak{X}, \ \delta \geqslant I(x)\}$ и $A_2 = \{S \times [-\infty, I(x_0)]\}$. Множество A_2 имеет непустую внутренность, которая не пересекается с множеством A_1. Поэтому существует гиперплоскость, разделяющая два выпуклых множества A_1 и A_2. Поскольку эта гиперплоскость не вертикальна (в силу предположения Б), то она является графиком некоторого линейного функционала Λ, такого, что Λ достигает своего максимума на S в точке x_0 и функционал $I + \Lambda$ достигает минимума в точке x_0.

По теореме Рисса линейный функционал на $C_n[0, 1]$ можно записать в виде $\int_0^1 \langle x, d\mu\rangle$, где μ — функция ограниченной вариации. Следовательно, для абсолютно непрерывной функции x имеем: $\Lambda(x) = -\int_0^1 \langle \dot{x}, \mu\rangle\, dt + \langle x(1), \mu(1)\rangle - \langle x(0), \mu(0)\rangle$. Таким образом, мы пришли к минимизации функционала

$$\varphi(x(1)) + \int_0^1 f(t, x(t))\, dt - \int_0^1 \langle \dot{x}(t), \mu(t)\rangle\, dt + \langle x(1), \mu(1)\rangle - \langle x(0), \mu(0)\rangle \tag{11}$$

на множестве решений дифференциального включения (2).

Теорема 3. *Если* $x_0(\cdot)$ — *решение задачи* (1), (2), (3), $x_0(t) \in \operatorname{int}\operatorname{dom} f(t, \cdot) \cap \operatorname{int}\operatorname{dom} a(t, \cdot)$, *выполняется предположение* Б *и для функции* f — *предположение* А, *то существуют такие абсолютно непрерывная функция* x^* *и функция ограниченной вариации* μ, *для которых выполняется:* $x^*(1) + \mu(1) \in \partial\varphi(x_0(1))$, $-\dot{x}^*(t) \in \partial x W_{a(t,\cdot)}(x_0(t), x^*(t) + \mu(t)) + \partial f(t, x_0(t))$ п. в.,

$$\langle \dot{x}_0(t), x^*(t) + \mu(t)\rangle = W_{a(t,\cdot)}(x_0(t), x^*(t) + \mu(t)) \text{ п. в.},$$

$$\frac{d\mu}{dt}(t) \in N_{G(t)}(x_0(t)) \text{ п. в.}, \quad \frac{d\mu_s}{d\theta}(t) \in N_{G(t)}\, x_0(t))\ \theta \text{ п. в.},$$

где μ_s — сингулярная составляющая функции μ, а θ — неотрицательная мера, относительно которой μ_s абсолютно непрерывна. Эти условия являются и достаточными для оптимальности решения.

Доказательство. Необходимость сформулированных условий вытекает из теоремы 2, примененной к задаче (11), (2) (с учетом леммы 7 [5]).

Докажем достаточность. Пусть $x(\cdot)$ — произвольное решение дифференциального включения (2), удовлетворяющее условию (3). Тогда $\int_0^1 \langle x(t)-$ $- x_0(t), \dot{x}^*(t)\rangle\, dt + \int_0^1 [f(t, x(t)) - f(t, x_0(t))]\, dt + \int_0^1 [W_{a(t,\cdot)}(x(t), x^*(t)+\mu(t))-$ $-W_{a(t,\cdot)}(x_0(t), x^*(t)+\mu(t))]\, dt \geqslant 0$. $\int_0^1 \langle x(t)-x_0(t), d\mu(t)\rangle \geqslant 0$ (в силу того, что:

$$\frac{d\mu}{dt}(t) \in N_{G(t)}(x_0(t)) \text{ п. в.}, \quad \frac{d\mu_s}{d\theta}(t) \in N_{G(t)}(x_0(t))\, \theta \text{ п. в.}).$$

Суммируя неравенства, получим

$$\int_0^1 \langle x(t) - x_0(t), d(x^*(t) + \mu(t))\rangle + \int_0^1 [f[t, x(t)) - f[t, x_0(t))]\, dt +$$
$$+ \int_0^1 [W_{a(t,\cdot)}(x(t), x^*(t) + \mu(t)) - W_{a(t,\cdot)}(x_0(t), x^*(t) + \mu(t))]\, dt \geqslant 0.$$

Учитывая, что $W_{a(t,\cdot)}(x_0(t), x^*(t) + \mu(t)) = \langle \dot{x}_0(t), x^*(t) + \mu(t)\rangle$ п. в., $W_{a(t,\cdot)}(x(t), x^*(t) + \mu(t)) \leqslant \langle \dot{x}(t), x^*(t) + \mu(t)\rangle$ п. в., прийдем к следующему неравенству:

$$\int_0^1 \langle x(t) - x_0(t), d(x^*(t) + \mu(t))\rangle + \int_0^1 \langle \dot{x}(t) - \dot{x}_0(t), x^*(t) + \mu(t)\rangle\, dt +$$
$$+ \int_0^1 [f(t, x(t)) - f(t, x_0(t))]\, dt \geqslant 0.$$

Из формулы интегрирования по частям интеграла Стилтьеса два первых члена неравенства дают в сумме $\langle x(1) - x_0(1), x^*(1) - \mu(1)\rangle$. Поскольку $\langle x(1) - x_0(1), \mu(1) + x^*(1)\rangle \leqslant \varphi(x(1)) - \varphi(x_0(1))$, окончательно получаем $\varphi(x(1)) + \int_0^1 f(t, x(t))\, dt \geqslant \varphi(x_0(1)) - \int_0^1 f(t, x_0(t))\, dt$, что и доказывает оптимальность $x_0(\cdot)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rockafellar R. T. State constraints in convex control problems of Bolza.— SIAM. J. Control, 1972, **10**, N 4, p. 691—715.
2. Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремума для дифференциальных включений.— Кибернетика, 1976, № 6. с. 60—73.
3. Rockafellar R. T. Measurable dependence of convex sets and functions on parameters.— J. Math. Anal. Appl., 1969, **28**, p. 4—25.
4. Рокафеллар Р. Т. Выпуклые интегральные функционалы и двойственность.— В кн.: Математическая экономика. М.: Мир, 1974, с. 222—237.
5. Рокафеллар Р. Т. Интегралы, являющиеся выпуклыми функционалами. II.— В кн.: Математическая экономика, М.: Мир, 1974, с. 170—205.

6. C l a r k e F. H. Necessary Conditions for Nonsmooth Problems in Optimal Control and the Culculus of Variations. Dissertation, University of Washington, 1973.— 120 p.
7. H a l k i n H. Extremal Properties of Biconvex Contingent Equations: Ordinary Differential Equations (NRL—MRC Conf.). Academic Press, 1972.

Институт кибернетики
АН УССР

Поступила в редакцию
31.VIII 1979 г.