УДК 517.91

И. П. Смерека

Стационарные колебательные процессы в существенно нелинейных автономных системах, возбуждаемых мгновенными силами

В настоящей работе, используя периодические Ateb-функции [1], предлагается методика исследования стационарных колебательных процессов в существенно нелинейных системах с импульсными воздействиями, описываемых уравнениями вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x^\nu = \varepsilon [f(x, \dot{x})\, \delta(x - x_0) + f_1(x, \dot{x})], \tag{1}$$

где ε — малый параметр, $\nu = \dfrac{2\nu_1 + 1}{2\nu_2 + 1}$ $(\nu_1, \nu_2 = 0, 1, 2, \ldots)$, $f(x, \dot{x})$ и $f_1(x, \dot{x})$ — известные аналитические функции своих аргументов, $\delta(x)$ — дельта функция Дирака [2].

Следует отметить, что уравнения (1) являются обобщением квазилинейных уравнений, метод исследования которых разработан и математически обоснован, например, в работах [3, 4, 5].

1. Приведение уравнения (1) к стандартному виду. Введем новые переменные a и ψ по формулам

$$x = a^\mu h v(\psi), \quad \dot{x} = a\omega u(\psi), \tag{2}$$

где $v(\psi) = \mathrm{sa}(\nu, 1, l\psi)$ и $u(\psi) = \mathrm{ca}(1, \nu, l\psi)$ — периодические Ateb-функции, $\mu = \dfrac{2}{\nu + 1}$, $h^{\nu+1} = \dfrac{\nu + 1}{2}$, $l = \dfrac{1}{\pi}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{\nu + 1}\right)\Gamma^{-1}\left(\dfrac{\nu + 3}{2\nu + 2}\right)$.

Для определенности будем считать, что $x_0 \geqslant 0$. Так как $\delta(a^\mu h v - x_0)$ отлична от нуля лишь при $a^\mu h > x_0$, то для того чтобы учитывалось влияние мгновенных импульсов, будем рассматривать систему в области $a^{\mu}h > x_0$.

Из (1), (2) с учетом свойств Ateb и $\delta(x)$-функций и сделанных предположений получим относительно переменных следующую систему уравнений:

$$\dot{a} = \pm \frac{\varepsilon}{\omega a} \sqrt{a^2 - \mu x_0^{\nu+1}} f\left(x_0, \pm \omega \sqrt{a^2 - \mu x_0^{\nu+1}}\right) \delta(a^{\mu} h v - x_0) + \\ + \frac{\varepsilon}{\omega} f_1(a^{\mu} h v, a\omega u)\, u,$$

$$\dot{\psi} = \frac{\omega h^{\nu}}{l a^{\mu-1}} - \frac{\varepsilon x_0}{l h \omega a^{\mu+1}} f\left(x_0, \pm \omega \sqrt{a^2 - \mu x_0^{\nu+1}}\right) \delta(a^{\mu} h v - x_0) - \\ - \frac{\varepsilon}{l \omega a} f_1(a^{\mu} h v, a\omega u)\, v, \tag{3}$$

где из двух знаков ($\pm$) знак ($-$) берется для ψ, изменяющегося в интервалах $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + \pi(2k+1)\right]$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Пусть $\psi_a^{(1)}$ и $\psi_a^{(2)}$ — корни уравнения

$$a^{\mu} h \operatorname{sa}(\nu, 1, l\psi) - x_0 = 0, \tag{4}$$

принадлежащие отрезку $[0, \pi]$ и такие, что

$$\operatorname{ca}(1, \nu, l\psi_a^{(1)}) = \sqrt{1 - \mu \frac{x_0^{\nu+1}}{a^2}}, \quad \operatorname{ca}(1, \nu, l\psi_a^{(2)}) = -\sqrt{1 - \mu \frac{x_0^{\nu+1}}{a^2}}. \tag{5}$$

Тогда, в силу 2π-периодичности Ateb-функций, можно записать

$$\delta(a^{\mu} h v - x_0) = \sum_{-\infty < k < \infty} \frac{\delta(\psi - \psi_a^{(1)} - 2k\pi) + \delta(\psi - \psi_a^{(2)} - 2k\pi)}{\mu l h a^{\mu-1} \sqrt{a^2 - \mu x_0^{\nu+1}}}. \tag{6}$$

Преобразовав первые слагаемые правых частей (3) с помощью зависимости (6) и равенства

$$\sum_{-\infty < k < \infty} \delta(x + 2k\pi) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos kx\right],$$

а вторые представив в виде рядов Фурье, относительно новых переменных приходим к такой стандартной системе с быстровращающейся фазой:

$$\dot{a} = \varepsilon A(a, \psi), \quad \dot{\psi} = w(a) + \varepsilon B(a, \psi). \tag{7}$$

Здесь $w(a) = \frac{\omega h^{\nu}}{l} a^{1-\mu}$, A и B сложным образом выражаются через правые части (3).

2. **Стационарное асимптотическое приближение для системы (7).** В первом приближении параметра ε асимптотическое стационарное решение системы (7) представим в виде

$$a^{(1)} = b + \varepsilon U^{(1)}(t), \quad \psi^{(1)} = \lambda t + \varphi + \varepsilon V^{(1)}(t), \tag{8}$$

где b, λ, φ — пока произвольные постоянные величины, $U^{(1)}(t)$ и $V^{(1)}(t)$ — искомые функции, не содержащие членов пропорциональных времени, т. е.

удовлетворяющие условиям

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}U^{(1)}(T)=0,\quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}V^{(1)}(T)=0. \tag{9}$$

Подставляя (8) в (7), получаем

$$\begin{aligned}\frac{da^{(1)}}{dt}-\varepsilon A(a^{(1)},\psi^{(1)})=\varepsilon\left[\frac{dU^{(1)}}{dt}-A(b,\lambda t+\varphi)\right]+\varepsilon^2\ldots,\\ \frac{d\psi^{(1)}}{dt}-[w(a^{(1)})+\varepsilon B(a^{(1)},\psi^{(1)})]=\lambda-w(b)+\\ +\varepsilon\left[\frac{dV^{(1)}}{dt}-B(b,\lambda t+\varphi)-\frac{\partial w(b)}{\partial b}U^{(1)}\right]+\varepsilon^2\ldots.\end{aligned} \tag{10}$$

Функции $U^{(1)}(t)$ и $V^{(1)}(t)$ определяются из системы уравнений

$$\frac{dU^{(1)}}{dt}=A(b,\lambda t+\varphi)-\alpha^{(1)},\quad \frac{dV^{(1)}}{dt}=B(b,\lambda t+\varphi)+\frac{\partial w(b)}{\partial b}U^{(1)}-\beta^{(1)}. \tag{11}$$

Здесь $\alpha^{(1)}$ и $\beta^{(1)}$ — произвольные величины, не зависящие от t. Здесь постоянные величины b и λ, соответствующие главным значениям амплитуды и частоты стационарных колебаний, можно найти из уравнений $\alpha^{(1)}(b)=0$, $\lambda=w(b)+\varepsilon\beta^{(1)}(b)$.

Произвольная постоянная φ, не влияющая на характер стационарного процесса, а лишь на начало отсчета, определяется из начальных условий.

Так как сумма вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\psi}{k}$ — ряд Фурье для функции $\frac{\pi-\psi}{2}$, заданной на промежутке $0<\psi<2\pi$, а для других ψ продленной по закону периодичности, то формулы (8) определяют в первом приближении амплитуду и фазу колебаний с помощью разрывных функций с разрывами в точках $\lambda t+\varphi-\psi_b^{(1)}=2k\pi$, $\lambda t+\varphi-\psi_b^{(2)}=2k\pi$ $(k=0,1,2,\ldots)$.

3. Пример. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{1}{C}q^{\nu}=MI_s\dot{q}\delta(q), \tag{12}$$

являющееся обобщением уравнения описываемого колебания, происходящие в ламповом генераторе в случае Z-характеристики [6].

Предположим, что $\frac{1}{L}$ мало. Представляя решение в виде

$$q=a^{\mu}h\,\mathrm{sa}(\nu,1,l\psi),\quad \dot{q}=a\omega\,\mathrm{ca}(1,\nu,l\psi), \tag{13}$$

где $\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}}$, относительно переменных a и ψ получим стандартную систему, которая с учетом лишь нулевых гармоний при разложении в ряды Фурье членов отражающих силы сопротивления имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{a}=\frac{MI_sh^{\nu}a^{1-\mu}}{l\pi L}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\cos k\psi+\sum_{k=1}^{\infty}\cos k(\psi-\pi)\right]-\frac{\nu+1}{\nu+3}\frac{Ra}{L},\\ \dot{\psi}=\frac{\omega h^{\nu}}{l}a^{1-\mu}.\end{aligned} \tag{14}$$

Первое стационарное приближение для системы (14), полученное согласно методике п. 2, имеет вид

$$a^{(1)} = b + \frac{MI_s}{\pi} \sqrt{\frac{C}{L}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [\sin k(\lambda t + \varphi) + \sin k(\lambda t + \varphi - \pi)] \right\},$$

$$\psi^{(1)} = \lambda t + \varphi - \left(\frac{\nu - 1}{\nu + 3} \right) \frac{MI_s}{\pi} \sqrt{\frac{C}{L}} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} [\cos k(\lambda t + \varphi) + \cos k(\lambda t + \varphi - \pi)] \right\}, \tag{15}$$

где $b = \left[\frac{(\nu + 3) MI_s}{2hl\pi R} \right]^{\frac{1}{\mu}}$, $\lambda = \frac{h^\nu}{l} \frac{1}{\sqrt{CL}} b^{1-\mu}$.

В заключение отметим, что при $\nu = 1$ изложенное выше полностью согласуется с результатами, полученными для квазилинейных систем в работах [3, 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Сеник П. М. Обращение неполной Beta-функции.— Укр. мат. журн., 1969, **21**, № 3, с. 325—333.
2. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике.— М.: Наука, 1976.— 280 с.
3. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев: Наук. думка, 1971.— 440 с.
4. Самойленко А. М. Применение метода усреднения для исследования колебаний, возбуждаемых мгновенными импульсами, в автоколебательных системах 2-го порядка с малым параметром.— Укр. мат. журн., 1961, **13**, № 3, с. 103—109.
5. Самойленко А. М. Метод усреднения в системах с толчками.— Мат. физика, 1971, вып. 9, с. 101—117.
6. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— 2-е изд.— М.: Физматгиз, 1959.— 915 с.

Львовский
политехнический институт

Поступила в редакцию
22.IV 1980 г.