УДК 517.535

В. М. Сорокивский

Об обобщенных порядках роста аналитических характеристических функций вероятностных законов

Пусть $F(x)$ — вероятностный закон, а $\varphi(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(izx)\, dF(x)$ — его характеристическая функция (х. ф.). Известно [1, с. 37], что для того, чтобы х. ф. $\varphi(z)$ закона $F(x)$ была аналитической в круге $|t| < R$, $0 < R < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $r < R$ при $x \to \infty$ выполнялось равенство

$$T(x) = 1 - F(x) + F(-x) = 0(\exp(-rx)). \tag{1}$$

В ряде работ (библ. см. в [2]) изучалась связь между ростом $M(r)$ и поведением функции $T(x)$ в случае, если функция $\varphi(z)$ целая. Рассмотрим случай, когда $\varphi(z)$ аналитическая в единичном круге и имеет на $|z|=1$ хотя бы одну особую точку.

Скажем, следуя [3], что функция $h(x)\in L^0$, если она непрерывна, положительна на $[a,\infty)$, $a\geqslant 0$, и монотонно возрастает к ∞ при $x\to\infty$, удовлетворяя при этом условию $\lim\limits_{x\to\infty} h((1+\lambda(x))x)/h(x)=1$ для любой функции $\lambda(x)$, стремящейся к 0 при $x\to\infty$. Далее, $h(x)\in\Lambda$, если $h(x)\in L^0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} h(cx)/h(x)=1$ для любой постоянной c, $0<c<\infty$. Здесь могут встречаться значения функции $h(x)\in\Lambda$ в точках, где она не определена: в этих случаях будем считать, что $h(x)=h(a)$. Считаем также $h(\infty)=\infty$.

Теорема 1. *Пусть $\alpha(x)\in L^0$, $\beta(x)\in\Lambda$. Обозначим $F(x:c)=\beta^{-1}(c\alpha(x))$ и допустим, что для всех c, $0<c<\infty$ выполняется*

$$\text{а) } \varlimsup_{x\to\infty}\frac{d\ln F(x:c)}{d\ln x}<1,\quad \text{б) } \lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(x\alpha^{-1}(c\beta(x)))}{\beta(x)}=c,$$

тогда $\rho_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}$, где

$$\gamma_{\alpha\beta}=\varlimsup_{x\to\infty}\alpha(x)/\beta\left[\left(1/\left(1+\frac{1}{x}\ln T(x)\right)\right)^{+}\right],\qquad \rho_{\alpha\beta}=\varlimsup_{r\to 1}\frac{\alpha\left(\frac{1}{1-r}\ln M(r)\right)}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)}\quad \text{\textit{и}}$$

$$a^{+}=(|a|+a)/2.$$

Доказательство. Пусть $\rho_{\alpha\beta}<\infty$. Тогда для всякого $\varepsilon>0$ при $r>r_0$ получаем

$$\ln 2M(r)\leqslant(1-r)\,\alpha^{-1}(\bar\rho\beta(1/(1-r))),\quad \bar\rho=\rho_{\alpha\beta}+\varepsilon. \tag{2}$$

Известно [1, с. 55], что для всех r, $0<r<1$, $x>0$ выполняется

$$\ln 2M(r)\geqslant\ln T(x)+rx, \tag{3}$$

отсюда, учитывая (2), находим $1+\frac{1}{x}\ln T(x)\leqslant(1-r)\left(1+\frac{1}{x}\alpha^{-1}(\bar\rho\beta(1/(1-r)))\right)$. Положив $r=r(x)=1-1/\beta^{-1}((1/\bar\rho)\alpha(x))$, приходим к неравенству $\left(1+\frac{1}{x}\ln T(x)\right)^{+}\leqslant 2/\beta^{-1}((1/\bar\rho)\alpha(x))$. Отсюда ввиду произвольности $\varepsilon>0$ $\rho_{\alpha\beta}\geqslant\gamma_{\alpha\beta}$. При $\rho_{\alpha\beta}=\infty$ это неравенство очевидно.

Докажем противоположное неравенство. Допустим, что $\gamma_{\alpha\beta}<\infty$. Из определения $\gamma_{\alpha\beta}$ имеем $T(x)\leqslant\exp(x/\beta^{-1}((1/\bar\gamma)\alpha(x))-x)$, $\bar\gamma=\gamma_{\alpha\beta}+\varepsilon$, $x\geqslant x_0$. Кроме того [1, с. 55], при некотором постоянном c имеет место неравенство

$$M(r)\leqslant c+r\int_0^\infty T(x)\exp(rx)\,dx. \tag{4}$$

Тогда для всякой функции $\delta(r)$, $0<r+\delta(r)<1$

$$M(r)\leqslant c+r\int_0^\infty T(x)\exp((r+\delta(r))x)\exp(-\delta(r)x)\,dx\leqslant c+\frac{1}{\delta(r)}\mu(r+\delta(r)),$$

где $\mu(r)-\sup\limits_{x\geqslant 0}\{T(x)\exp(rx)\}$. Следовательно,

$$M(r)\leqslant c+\frac{1}{\delta(r)}\max_{x\geqslant 0}\exp\left\{\frac{x}{F(x:1/\bar\gamma)}-x(1-r-\delta(r))\right\}. \tag{5}$$

Используя обычные методы исследования функций на экстремум и учитывая условие а) теоремы, как и в [3], получаем, что максимум правой части достигается при $x = \alpha^{-1}(\bar{\gamma}\beta((1+o(1))/(1-r-\delta(r))))$. Тогда из (5) находим $M(r) \leqslant c + \frac{1}{\delta(r)} \exp\left\{(1-r-\delta(r))\alpha^{-1}\left(\bar{\gamma}\beta\left(\frac{1+o(1)}{1-r-\delta(r)}\right)\right)\right\}$. Положив $\delta(r) = \frac{1}{2}(1-r) < 1-r$, получим $\frac{1}{2(1-r)}\ln M(r) \leqslant \frac{1}{2(1-r)}\ln\frac{1}{2(1-r)} + \alpha^{-1}\left(\bar{\gamma}\beta\left(\frac{1+o(1)}{2(1-r)}\right)\right)$. Отсюда, учитывая условие б) теоремы, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к неравенству $\rho_{\alpha\beta} \leqslant \gamma_{\alpha\beta}$. Тем самым теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha(x) \in L^0$, $\beta(x) \in \Lambda$ *и выполняются условия* а) *и* б), *тогда* $t_{\alpha\beta} \geqslant t^*_{\alpha\beta}$, *где*

$$t_{\alpha\beta} = \varliminf_{r\to 1} \alpha\left(\frac{1}{1-r}\ln M(r)\right)/\beta\left(\frac{1}{1-r}\right), \quad t^*_{\alpha\beta} = \varliminf_{x\to\infty} \alpha(x)/\beta\left[\left(1/\left(1+\frac{\ln T(x)}{x}\right)\right)^+\right],$$

если, кроме того, $T(x)$ *непрерывно дифференцируема и* $\varkappa(x) = \frac{d}{dx}(-\ln T(x))$ *возрастает, то* $t_{\alpha\beta} = t^*_{\alpha\beta}$.

Доказательство. Из определения $t^*_{\alpha\beta}$, учитывая (3), для каждого $\varepsilon > 0$ при $x \geqslant x_0(\varepsilon)$ получаем $\ln M(r) \geqslant x\left(1/\beta^{-1}((1/\bar{t})\alpha(x)) - 1 + r + \frac{\ln 2}{x}\right)$, $\bar{t} = t^*_{\alpha\beta} - \varepsilon$. Взяв в последнем неравенстве $x = x(r) = \alpha^{-1}(\bar{t}\beta(1/2(1-r)))$, получим $t_{\alpha\beta} \geqslant t^*_{\alpha\beta}$. Докажем противоположное неравенство. Отметим, что $\varkappa(x) < 1$ при всех достаточно больших x. Действительно, в противоположном случае, в силу монотонности $\varkappa(x)$, для всех достаточно больших $x \geqslant x_0' \geqslant x_0$ имели бы $\varkappa(x) > \alpha > 1$, откуда $T(x) = T(0)\exp\left(-\int_0^x \varkappa(x)\,dx\right) = T(0)\exp\left(-\int_0^{x_0'}\varkappa(x)\,dx - \int_{x_0'}^x \varkappa(x)\,dx\right) \leqslant T(0)\exp(-\alpha(x-x_0'))$, что в силу (1) противоречит тому, что $\varphi(z)$ имеет особую точку на единичной окружности. Пусть $E(r) = \max_{x\geqslant 0}(T(x)\exp(rx))$. В силу $\varkappa(x) \to 1$ этот максимум достигается в единственной точке x, такой, что $r = \varkappa(x)$. Допустим, что $t^*_{\alpha\beta} < \infty$ и x_k — последовательность, для которой

$$\lim_{k\to\infty} \alpha(x_k)/\beta\left[\left(1/\left(1+\frac{1}{x_k}\ln T(x_k)\right)\right)^+\right] = t^*_{\alpha\beta}. \tag{6}$$

Положим $\mu(r) = \max_{k>1}(T(x_k)\exp(rx_k))$. Так как при $r = \varkappa(x)$ выполняется $E(r) = T(x)\exp(rx)$, то при $r_k = \varkappa(x_k)$ $E(r_k) = \mu(r_k) = T(x_k)\exp(r_k x_k)$. Кроме того, из (4) находим $M(r) \leqslant c + \int_0^\infty T(x)\exp\left(\frac{1+r}{2}x\right)\exp\left(-\frac{1-r}{2}x\right)dx \leqslant E\left(\frac{1+r}{2}\right)\frac{2}{1-r}$. Учитывая условие б), получаем

$$\varliminf_{r\to 1} \alpha\left(\frac{1}{1-r}\ln M(r)\right)/\beta\left(\frac{1}{1-r}\right) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{\alpha\left(\frac{1}{1-r_k}\ln\mu(r_k)\right)}{\beta\left(\frac{1}{1-r_k}\right)}. \tag{7}$$

Из (6) имеем

$$\ln \mu (r) \leqslant \max_{k<1} \left(\frac{x_k}{F(x_k : 1/t_1)} - x_k + r x_k \right) \leqslant \max_{x>0} \left(x \left(\frac{1}{F(x : 1/t_1)} - 1 + r \right) \right), \quad (8)$$

где $t_1 = t^*_{\alpha\beta} - \varepsilon$. Учитывая (7), как и при доказательстве второй части теоремы 1, получаем $\lim\limits_{r\to 1} \alpha \left(\frac{1}{1-r} \ln M(r) \right) / \beta (1/(1-r)) \leqslant t_1$. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то $t_{\alpha\beta} \leqslant t^*_{\alpha\beta}$, что и необходимо было показать.

Отметим, что методом доказательства теоремы 1 можно показать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha(x) \in L^0$, $\beta(x) \in \Lambda$, *если кроме условий а) и б) выполняется* в) $F(x/F(x:c)) \sim F(x:c)$, *то* $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} \alpha(x)/\beta \left(\left[1 \Big/ \left(1 + \frac{1}{x} \ln T(x) \right) \right]^+ \right) = \widehat{\rho}_{\alpha\beta}$, *где* $\widehat{\rho}_{\alpha\beta} = \overline{\lim\limits_{r\to 1}} \alpha (\ln M(r)) / \beta \left(\frac{1}{1-r} \right)$ — *обобщенный порядок роста аналитических в единичном круге функций, введенный в* [4].

Пусть аналитическая в единичном круге функция $\varphi(z)$ имеет порядок ρ, $0 < \rho < \infty$, где $\rho = \overline{\lim\limits_{r\to 1}} \ln \ln M(r) / \ln \frac{1}{1-r}$. Уточненным порядком функции $\varphi(z)$ будем называть, следуя [5], функцию $\rho(r)$, $0 \leqslant r < 1$, удовлетворяющую условиям: 1) $\rho(r) \geqslant 0$, $0 \leqslant r < 1$; 2) $\lim\limits_{r\to 1} \rho(r) = \rho$; 3) $\lim\limits_{r\to 1} (1 - r) \ln (1-r) \rho'(r) = 0$. Величина $t_\varphi = \overline{\lim\limits_{r\to 1}} (1-r)^{\rho(r)} \ln M(r)$ называется типом функции $\varphi(z)$ при уточненном порядке $\rho(r)$. Если верхний предел заменить нижним, то полученное число T_φ называется нижним типом при уточненном порядке $\rho(r)$. Далее, обозначим через $\eta(y)$ функцию, обратную к функции $\varphi(y) = y^{\rho(y/(y-1))+1}$.

Теорема 4. *Тип* t_φ *аналитической х. ф.* $\varphi(z)$ *уточненного порядка* $\rho(r)$ *определяется по формуле* $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} \eta(x) \left(1 + \frac{1}{x} \ln T(x) \right)^+ = (t_\varphi \rho)^{1/(1+\rho)} (1 + \rho)/\rho$.

Теорема 5. *Если* $T(x)$ *непрерывно дифференцируема и* $\varkappa(x) = \frac{d}{dx} \times (-\ln T(x))$ *возрастает, то нижний тип* T_φ *аналитической х. ф.* $\varphi(z)$ *определяется по формуле* $\lim\limits_{x\to\infty} \eta(x) \left(1 + \frac{1}{x} \ln T(x) \right) = (T_\varphi \rho)^{1/(1+\rho)} (1 + \rho)/\rho$.

Доказательства теорем 4 и 5 аналогичны доказательствам теорем 1 и 2. Поэтому не будем их приводить. Отметим, что для случая, когда $\varphi(z)$ целая, предложения, аналогичные этим теоремам, получены в [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Линник Ю. В., Островский И. В. Разложение случайных величин и векторов.— М.: Наука, 1972.— 476 с.
2. Ostrovskii I. V. The Arithmetic of Probability Distributions.— J. of Multivariate Analysis, 1977, 7, № 4.
3. Шеремета М. Н. О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения— Изв. вузов. Математика, 1967, № 2, с. 100—108.
4. Шеремета М. М. Про зв'язок між ростом функції, аналітичної в крузі, і модулями коефіцієнтів її ряду Тейлора.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1966, № 6, с. 729—730.
5. Гижа Б. О. Деякі нерівності для зростаючих відносно логарифма функцій.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1973, № 4, с. 293—298.
6. Dewes M., Riedel M. The connection between the proximate order of an entire characteristic funktion and the corresponding distribution funktion.— Czechosl. Math. J. (ČSSR), 1977, 27, N 2, p. 173—185.

Дрогобычский
педагогический институт

Поступила в редакцию
19.II 1979 г.