УДК 517.5

А. И. Степанец

Асимптотически точные оценки отклонений частных сумм Фурье на классах непрерывных периодических функций многих переменных

В статье получено распространение на случай многих переменных результата М. С. Никольского об асимптотических значениях точных верхних граней приближений непрерывных функций при помощи частных сумм их рядов Фурье.

Пусть $H_\omega^{(N)}$ — класс непрерывных, 2π-периодических по каждой из переменных функций $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, которые подчинены условию $|f(x) - f(x')| = |f(x_1, \ldots, x_N) - f(x_1', \ldots, x_N')| \leqslant \sum_{i=1}^{N} \omega_i(|x_i - x_i'|)$, где $\omega_i(t_i)$, $i = \overline{1, N}$ — заданные модули непрерывности,

$$S_n(f; x) = S_{n_1, n_2, \ldots, n_N}(f; x_1, x_2, \ldots, x_N) =$$

$$= \frac{1}{\pi^N} \int\limits_{Q_N} f(t_1, \ldots, t_N) \prod_{i=1}^{N} D_{n_i}(t_i - x_i)\, dt_1 \ldots dt_N, \quad Q_N = [x : |x_i| \leqslant \pi],$$

— частные прямоугольные суммы Фурье функции $f(x)$ порядка $n = (n_1, \ldots, n_N)$, n_i, $i = \overline{1, N}$ — произвольные натуральные числа, $D_{n_i}(t)$ — ядро Дирихле порядка n_i.

В заметке изучается поведение величины

$$\varepsilon_n^{(N)}(\omega) = \sup_{f \in H_\omega^{(N)}} \| f(x) - S_n(f; x) \|_C, \tag{1}$$

когда координаты n_i вектора n неограниченно возрастают.

Именно, приводится точная по порядку оценка сверху величины $\varepsilon_n^{(N)}(\omega)$ и в случае, когда функции $\omega_i(t_i)$, $i = \overline{1, N}$, являются выпуклыми, выписываются для нее асимптотические равенства, дающие полное решение задачи, которую мы называем (см. [1]) задачей Колмогорова — Никольского, заключающейся в нахождении явного вида функции $\varphi(n) = \varphi(n, \omega)$, для которой

$$\varepsilon_n^{(N)}(\omega) = \varphi(n) + o[\varphi(n)]. \tag{2}$$

При $N = 1$ в случае, когда $\omega(t) = t$, решение этой задачи содержится в работе [2], в случае произвольных выпуклых модулей непрерывности — в работе [3].

Двумерный случай в плане получения соотношения (2) впервые рассмотрен в [4], где в отдельных ситуациях, например, когда $\omega_1\left(\frac{1}{n_1}\right) = O\left[\omega_2\left(\frac{1}{n_2}\right)\right]$, получено решение задачи Колмогорова — Никольского. В общем же случае правая часть его аналога равенства (2) могла неограниченно возрастать для сколь угодно хороших модулей $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$.

Равенство (2) для величин $\varepsilon_n^{(2)}(\omega)$ в случае, когда $\omega_1(t) = At^\alpha$, $\omega_2(t) = Bt^\beta$, $0 < \alpha, \beta \leqslant 1$, A и B — фиксированные положительные постоянные, получено в работах [5, 6]. По сравнению с отмеченным, в случае, когда $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ — выпуклые модули, получение соотношения (2) принципиальных отличий не имеет и соответствующее равенство было приведено в [7]. Позже оно было передоказано в [8].

Основной результат настоящей заметки составляет теорема.

Теорема 1. *При произвольном возрастании натуральных чисел* $n_1, n_2, \ldots, n_N$

$$\varepsilon_n^{(N)}(\omega) \leqslant \frac{2^{2N-1}}{\pi^{2N}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j(k)\in G_N^{(k)}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} \prod_{i\in C_{j(k)}} \ln n_i \int_{P_{j(k)}} \min_{i\in C_{j(k)}} \left\{\omega_i\left(\frac{4t_i}{2n_i+1}\right)\right\} \times$$

$$\times \prod_{i\in C_{j(k)}} \sin t_i dt + O\left[\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j(k)\in G_N^{(k)}} \min_{i\in C_{j(k)}} \left\{\omega_i\left(\frac{1}{n_i}\right)\right\} \sum_{\nu\in C_{j(k)}} \prod_{\substack{i\in C_{j(k)}\\ i\neq\nu}} \ln n_i\right], \qquad (3)$$

где $P_{j(k)} = \left[x : 0 \leqslant x_i \leqslant \frac{\pi}{2},\ i\in C_{j(k)},\ x_i = 0,\ i \overline{\in} C_{j(k)}\right]$, $G_N^{(k)}$ *— множество все- возможных k-мерных векторов* $j(k) = (j_1^{(k)}, \ldots, j_k^{(k)})$, *координаты которых — целые числа, удовлетворяющие неравенствам* $1 \leqslant j_1^{(k)} < j_2^{(k)} < \ldots < j_{k-1}^{(k)} \leqslant$ $\leqslant N$, $k = \overline{1, N-1}$, $G_N^{(0)} \overset{\mathrm{df}}{=} \{j(0)\} \overset{\mathrm{df}}{=} \{0\}$, $C_{j(k)}$ *— множество всех натуральных чисел, не превышающих N и отличных от координат вектора* $j(k)$.

В случае, когда функции $\omega_i(t)$, *определяющие класс* H_ω, *являются выпуклыми, в* (3) *всегда имеет место знак равенства.*

Отметим некоторые факты, вытекающие из этой теоремы.

Обозначим через $a_{j(k)}$ и $b_{j(k)}$ общие члены двойных сумм соответственно первого и второго слагаемых правой части (3). Поскольку, как легко видеть,

$$\int_{P_{j(k)}} \min_{i\in C_{j(k)}} \left\{\omega_i\left\{\frac{4t_i}{2n_i+1}\right)\right\} \prod_{i\in C_{j(k)}} \sin t_i dt = O\left[\min_{i\in C_{j(k)}} \omega_i\left(\frac{1}{n_i}\right)\right], \qquad (4)$$

то

$$\lim_{n_i\to\infty} (b_{j(k)}/a_{j(k)}) = 0. \qquad (5)$$

Это соотношение вместе с (3) позволяет заключить, что, во-первых, для любых модулей непрерывности $\omega_i(t)$, $i = \overline{1, N}$,

$$\varepsilon_n^{(N)}(\omega) = O\left[\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j(k)\in G_N^{(k)}} \min_{i\in C_{j(k)}} \left\{\omega_i\left(\frac{1}{n_i}\right)\right\} \prod_{i\in C_{j(k)}} \ln n_i\right], \qquad (6)$$

и, во-вторых, если модули $\omega_i(t)$, $i = \overline{1, N}$, являются выпуклыми, соотношение (3) всегда дает решение задачи Колмогорова — Никольского.

Если известен взаимный порядок стремления к нулю величин $\omega_i\left(\frac{\pi}{2n_i+1}\right)$, то в этом случае (3) значительно упрощается. Именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 1′. *Если при* $n_i \to \infty$, $i = \overline{1, N}$, *выполняются неравенства*

$$\omega_1\left(\frac{\pi}{2n_1+1}\right) \leqslant \omega_2\left(\frac{\pi}{2n_2+1}\right) \leqslant \ldots \leqslant \omega_N\left(\frac{\pi}{2n_N+1}\right), \qquad (7)$$

то

$$\varepsilon_n^{(N)}(\omega) \leqslant \frac{2^{2N-1}}{\pi^{2N}} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} \prod_{i=k+1}^{N} \ln n_i \int\limits_{P_k} \min_{i \neq \overline{1,k}} \left\{\omega_i\left(\frac{4t_i}{2n_i+1}\right)\right\} \prod_{i=k}^{N} \sin t_i dt +$$

$$+ O\left[\sum_{k=0}^{n-1} \min_{i \neq 1,k} \omega_i\left(\frac{1}{n_i}\right) \sum_{\nu=k+1}^{N} \prod_{\substack{i=k+1 \\ i \neq \nu}} \ln n_i\right],$$

$$P_k = \left[x : 0 \leqslant x_i \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad i = k + \overline{1, N}, \; x_i \equiv 0, \; i = \overline{1, k}\right]. \qquad (3')$$

В случае, когда функции $\omega_i(t)$ *выпуклы, в* (3′) *всегда имеет место знак равенства.*

Отсюда вследствие (4) и (5) заключаем, что при выполнении (7) соотношение (6) переходит в равенство

$$\varepsilon_n^{(N)}(\omega) = O\left[\sum_{i=1}^{N-1} \min_{i \neq \overline{1,k}} \omega_i\left(\frac{1}{n_i}\right) \prod_{i=k+1}^{N} \ln n_i\right] \qquad (6')$$

и что соотношение (3′) решает задачу Колмогорова — Никольского, если модули $\omega_i(t)$ выпуклы.

Особенно простой вид принимает утверждение теоремы 1 (или 1′), если все величины $\omega_i\left(\frac{\pi}{2n_i+1}\right)$ равны между собой. В этом случае главными частями двойных сумм в (3) и (3′) будут слагаемые, отвечающие значению $k=0$ и тогда

$$\varepsilon_n^{(N)}(\omega) \leqslant \frac{2^{2N-1}}{\pi^{2N}} \prod_{i=1}^{N} \ln n_i \int\limits_{P_0} \min_i \left\{\omega_i\left(\frac{4t_i}{2n_i+1}\right)\right\} \prod_{i=1}^{N} \sin t_i dt +$$

$$+ O\left[\omega_1\left(\frac{1}{n_1}\right) \sum_{\nu=1}^{N} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \nu}}^{N} \ln n_i\right], \qquad (3'')$$

которое для выпуклых модулей $\omega_i(t)$ обращается в равенство и доставляет решение задачи Колмогорова — Никольского.

Выделим один частный случай этого соотношения. Пусть $n_i = n_0$, $\omega_i(t) = t$, $i = \overline{1, N}$. Тогда, согласно (3″)

$$\varepsilon_n^{(N)}(\omega) = \varepsilon_{n_0}^{(N)}(\omega) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2N} \frac{\ln^N n_0}{n_0} \int\limits_{P_0} \min_i \{t_i\} \prod_{i=1}^{N} \sin t_i dt + O\left[\frac{\ln^{N-1} n_0}{n_0}\right]. \qquad (8)$$

Подсчеты показывают, что

$$\int\limits_{P_0} \min_i \{t_i\} \prod_{i=1}^{N} \sin t_i dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^N t dt = \frac{1}{4}[\pi + 2 + (-1)^N (\pi - 2)] \times$$

$$\times \frac{(N-1)!!}{N!!}. \qquad (9)$$

Объединяя соотношения (8) и (9), убеждаемся, что имеет место такая теорема.

Теорема 1''. *Пусть* $S_n(f; x)$ — *частная прямоугольная сумма Фурье функции* $f(x)$ *порядка* n *по каждой из переменных. Тогда*

$$\sup_{f\in H_1} \| f(x) - S_n(f; x)\|_C = C_N \frac{\ln^N n}{n} + O\left[\frac{\ln^{N-1} n}{n}\right], \tag{10}$$

где $C_N = \frac{2^{2N-1}}{\pi^{2N}}[\pi + 2 + (-1)^N(\pi - 2)]\frac{(N-1)!!}{N!!}$, H — *класс* 2π-*периодических по каждой их переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_N$ *функций, для которых* $|f(x_1, \ldots, x_N) - f(x_1', \ldots, x_N')| \leqslant \sum_{i=1}^{N} |x - x'|$.

Легко видеть, что в случае, когда $N = 1$, соотношение (10) дает упомянутые выше результаты А. Н. Колмогорова и С. М. Никольского.

Полное доказательство теоремы 1 имеется в работе [9]. Здесь отметим лишь некоторые из его узловых моментов.

Лемма 1. *Для любой функции* $f \in H_\omega$, $f(0) = 0$ *имеет место равенство*

$$S_n(f; 0) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j(k)\in G_N^{(k)}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{N-k} \int_{P_{j(k)}} f(t) \prod_{i=C_{j(k)}} d_{n_i}(t_i)\, dt + O[\gamma_n], \tag{11}$$

где

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j(k)\in G_N^{(k)}} \min_{i\in C_{j(k)}} \left\{\omega_i\left(\frac{1}{n_i}\right)\right\} \sum_{\nu\in C_{j(k)}} \prod_{\substack{i\in C_{j(k)}\\ i\neq\nu}} \ln n_i,$$

$$d_{n_i}(t_i) = \begin{cases} \dfrac{\sin\dfrac{2n_i+1}{2}t_i}{2\sin\dfrac{(k_i+1)\pi}{2n_i+1}}, & t_i \in \left[\dfrac{2k_i+1}{2n_i+1}, \dfrac{2k_i+3}{2n_i+1}\right], \\ 0, & t_i \in \left[0, \dfrac{\pi}{2n_i+1}\right], \quad k_i = 0, 1, \ldots, n_i - 1. \end{cases}$$

Эта лемма позволяет с нужной точностью свести задачу о нахождении величины (1) к нахождению верхней грани первого из двух слагаемых правой части (11), что в силу относительной простоты ядер $d_{n_i}(t_i)$ уже удается сделать непосредственно при помощи приводимой ниже леммы 2.

Отметим, что идея подобной процедуры заимствована у С. М. Никольского, который применял ее в одномерном случае в [3].

При доказательстве леммы 1, а также при нахождении верхней грани правой части (11) важную роль играет следующий многомерный аналог известного утверждения Н. П. Корнейчука — С. Б. Стечкина (см. [10]).

Лемма 2. *Пусть* $\psi_i(t_i)$, $i = \overline{1, N}$ — *суммируемые на* $[a_i, b_i]$ *функции такие, что* $\psi_i(t_i) > 0$ $(\psi_i(t_i) < 0)$ *почти всюду на* (a_i, c_i), $a_i < c_i < b_i$, $\psi_i(t_i) < 0$ $(\psi_i(t_i) > 0)$ *почти всюду на* (c_i, b_i) *и, кроме того,* $\int_{a_i}^{b_i} \psi_i(t_i)\, dt_i = 0$.

Тогда, каковы бы ни были модули непрерывности $\omega_i(t)$, $i = \overline{1, N}$,

$$\sup_{f\in H_\omega(P_{a,b})} \left| \int_{P_{a,b}} f(t_1, \ldots, t_N) \prod_{i=1}^{N} \psi_i(t_i)\, dt \right| \leqslant 2^{N-1} \int_{P_{a,c}} \left| \prod_{i=1}^{N} \psi_i(t_i) \right| \times$$

$$\times \min_i \{\omega_i(\rho_i(t_i) - t_i)\}\, dt, \tag{12}$$

где $P_{a,b} = [x : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, i = \overline{1, N}]$, $P_{a,c} = [x : a_i \leqslant x_i \leqslant C_i, \quad i = \overline{1, N}]$, $H_\omega(P_{a,b})$ — *класс функций* $f(x)$, *которые на* $P_{a,b}$ *удовлетворяют условию* $|f(x) - f(x')| \leqslant \sum_{i=1}^{N} \omega_i(|x_i - x_i'|)$, $\rho_i(x_i)$ — *функции, определяющиеся на* $[a_i, c_i]$ *посредством равенств*

$$\int_{a_i}^{x_i} \psi_i(t_i)\, dt_i = \int_{a_i}^{\rho_i(x_i)} \psi_i(t_i)\, dt_i, \quad a_i \leqslant x_i \leqslant c_i \leqslant \rho_i(x_i) \leqslant b_i.$$

В случае, когда функции $\omega_i(t)$, $i = \overline{1, N}$ *выпуклы, а функции* $\psi_i(t_i)$ *удовлетворяют еще и условию* $\psi_i(t_i) = \psi_i(2c_i - t_i)$, *соотношение* (12) *является равенством.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанец А. И. Исследования по экстремальным задачам теории суммирования рядов Фурье: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Киев, 1974.— 39 с.
2. Kolmogoroff A. H. Zur Grössenordnung des Restliedes Fourierschen Reihen differenrierbaren Functionen.— Ann. of Math., 1935, **36**, pp. 521—526
3. Никольский С. М. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1945, **15**, с. 1—76.
4. Бугаец П. Т. Асимптотическая оценка остатка при приближении функций двух переменных суммами Фурье.— ДАН СССР, 1951, **79**, № 4, с. 203—205.
5. Степанец А. И. Отклонение частных сумм Фурье на классах функций Гельдера двух переменных.— ДАН СССР, 1972, **206**, № 3, с. 549—551.
6. Степанец А. И. Приближение функций, удовлетворяющих условиям Липшица, суммами Фурье.— Укр. мат. журн., 1972, **24**, № 6, с. 599—609.
7. Степанец А. И. Исследования по экстремальным задачам теории суммирования рядов Фурье: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Киев, 1974.— 305 с.
8. Подкорытов А. Н. Приближение одного класса функций двух переменных суммами Фурье.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1974, **13**, № 3, с. 170—183.
9. Степанец А. И. Приближение суммами Фурье непрерывных периодических функций многих переменных : Препринт ИМ-77-2.— Киев : Институт математики АН УССР, 1977, с. 1—46.
10. Корнейчук Н. П. Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1971, **35**, № 1, с. 93—124.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
11.III 1979 г.