УДК 517.2:517.94

З. Е. Филер

Об одном обобщении формулы Тейлора и ее применении к решению дифференциальных уравнений

1. Как известно [1], задача Коши

$$L[y] \equiv a_0 y + a_1 y' + \ldots + a_{n+1} y^{(n+1)} = f(x), \ a_i = \text{const},$$
$$y(x_0) = y_0, y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}, \quad k = 1, \ldots, n, a_{n+1} \neq 0 \tag{1}$$

имеет решение

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} y_0^{(k)} u_k(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} u_n(x - t) f(t)\, dt. \tag{2}$$

Здесь $u_i(x)$ — частное решение однородного уравнения $L[u]=0$, удовлетворяющее условиям

$$u_i^{(k)}(0)=\delta_{ik}=\begin{cases}0 & \text{при } i\neq k,\\ 1 & \text{при } i=k.\end{cases} \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что в частном случае

$$L[y]\equiv y^{(n+1)} \tag{1a}$$

имеем $u_i(x)=x^i/i!$ и формула (3) превращается в формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$y(x)=y(x_0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\,y^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f(t)\,dt. \tag{2a}$$

Так же, как в [2], применяя к интегралу в (2) вторую теорему о среднем, будем иметь

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}y_0^{(k)}u_k(x-x_0)+R_n(x,x_0), \tag{4}$$

где «остаточный член»

$$R_n(x,x_0)=f(c)\,u_{n+1}(x-x_0). \tag{5}$$

Здесь функция $u_{n+1}(x)$ есть «следующая» функция семейства (3):

$$u_{n+1}(x)=\int_0^x u_n(x)\,dx; \tag{6}$$

очевидно, $u_{n+1}(0)=0$, $u'_{n+1}(x)=u_n(x)$, $u_{n+1}^{(k)}(0)=0$ при $k=1,\dots,n$; $u_{n+1}^{(n+1)}(0)=1$. Нетрудно видеть, что функция $u_{n+1}(x)$ удовлетворяет уравнению $\frac{d}{dx}L[u]=0$.

Первая сумма в формуле (4) есть «L-многочлен Тейлора»:

$$T_L(x-x_0)=\sum_{k=0}^{n}y_0^{(k)}u_k(x-x_0). \tag{7}$$

Для функции $f(x)$, равной постоянной B, формула (4) точна, так как

$$y(x)=T_L(x-x_0)+Bu_{n+1}(x-x_0) \tag{8}$$

— решение неоднородного уравнения (1), удовлетворяющее заданным начальным условиям.

2. Для нелинейного уравнения

$$L[y]=f(x,y,y',\dots,y^{(n)}) \tag{9}$$

формула (2) дает систему интегральных уравнений

$$y^{(k)}(x)=\sum_{j=0}^{n}y_0^{(j)}u_j^{(k)}(x-x_0)+\int_{x_0}^{x}u_n^{(k)}(x-t)\,f[t,y(t),\dots,y^{(n)}(t)]\,dt,\ k=0,1,\dots,n, \tag{10}$$

эквивалентных задаче Коши для уравнения (9) с теми же начальными условиями.

Система (10) порождает численный метод

$$y_{m+1}^{(k)}=\sum_{j=0}^{n}y_m^{(j)}a_{jk}(h_m)+b_k(h_m)f_m,\quad k=0,1,\dots,n, \tag{11}$$

где

$$a_{jk}(h) = u_j^{(k)}(h),\ b_k(h) = \int_0^h u_n^{(k)}(t)\,dt = u_n^{(k-1)}(h)\ (k \geqslant 1),$$

$$f_m = f(t_m, y_m, y'_m, \ldots, y_m^{(n)}),\ \ y_m^{(k)} \simeq y^{(k)}(x_0 + mh). \tag{12}$$

При постоянном шаге h коэффициенты формул (11) постоянны и метод на каждом шаге требует только одного подсчета значения функции $f(t, y, y', \ldots, \ldots, y^{(n)})$. Если не считать «разовых» затрат на отыскание коэффициентов (12), формулы (11) по объему вычислений эквивалентны методу Эйлера.

Предложенный численный метод является точным для функции f, постоянной на каждом из шагов и непрерывной слева. Очевидна оценка погрешности метода на одном шаге: $|y(x_k) - y_k| = |b_0(h)|\,|f_{k-1} - \bar{f}_{k-1}| \leqslant \leqslant |b_0(h)|\,hM_{k-1}$, где $\bar{f}_{k-1} = f(t, y(t), \ldots, y^{(n)}(t))|_{t=\bar{t}_{k-1}}$, $\bar{t}_{k-1} \in [t_{k-1}, t_k]$, $M_{k-1} = = \sup\limits_{t\in[t_{k-1}, t_k]} \dfrac{df}{dt}$.

3. На основе системы функций $u_i(x)$, построенных для линейного оператора $L[y]$, можно образовать «L-ряд Тейлора». При этом естественно продолжить систему функций $u_i(x)$ аналогично формуле (6):

$$u_{n+j+1}(x) = \int_0^x u_{n+j}(t)\,dt = \frac{1}{j!}\int_0^x (x-t)^j u_n(t)\,dt. \tag{13}$$

Так как, очевидно,

$$y(x) = \sum_{s=0}^{n} y_0^{(s)} u_s(x - x_0) + \sum_{k=0}^{N-1} L_k[y]_0 \cdot u_{n+k+1}(x - x_0) +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} u_{n+N}(x - t)\, L_N[y(t)]\,dt,$$

то сходимость «L-ряда» зависит не только от поведения производных $y_0^{(s)}$, но и от поведения дифференциального оператора $L_N[y(t)]$ на функции $y(t)$, представляемой «L-рядом Тейлора». Здесь при $N > n$ $L_N[y] = = \dfrac{d^{N-n}}{dt^{N-n}} L[y(t)]$.

Если, начиная с некоторого N, существует окрестность точки x_0, в которой все $L_N[y(t)]$ равномерно ограничены, то, поскольку $u_{n+j}(x) = = x^{n+j}/(n+j)! + o(x^{n+j})$, в этой окрестности «$L$-ряд» будет равномерно сходиться и обладать всеми свойствами равномерно сходящегося ряда.

4. Приведем примеры соответствующих разложений:

а). Если $L[y] = y'' + y$, то $u_0(x) = \cos x$, $u_1(x) = \sin x$, $u_2(x) = 1 - \cos x$, $u_3(x) = x - \sin x$, $u_4(x) = \frac{1}{2}x^2 + \cos x - 1, \ldots$. Поэтому

$$y(x) = y_0 \cos(x - x_0) + y'_0 \sin(x - x_0) + (y''_0 + y_0)(1 - \cos(x - x_0)) +$$

$$+ (y'''_0 + y'_0)(x - x_0 - \sin(x - x_0)) + (y_0^{\mathrm{IV}} + y''_0)\left(\frac{1}{2}(x - x_0)^2 + \right.$$

$$\left. + \cos(x - x_0) - 1\right) + \ldots$$

б). При $L[y] = y'' - y$ аналогично получим $y(x) = y_0 \operatorname{ch}(x - x_0) + y'_0 \operatorname{sh}(x - x_0) + (y''_0 - y_0)(\operatorname{ch}(x - x_0) - 1) + (y'''_0 - y'_0)(\operatorname{sh}(x-x_0) - (x-x_0)) + (y^{\mathrm{IV}}_0 - y''_0)\left(\operatorname{ch}(x - x_0) - \frac{1}{2}(x - x_0)^2 - 1\right) + \ldots.$

в). Для $L[y] = y'' - 3y' + 2y$ имеем $u_0(x) = 2e^x - e^{2x}$, $u_1(x) = -e^x + e^{2x}$.

Отсюда $y(x) = y_0(2e^{x-x_0} - e^{2(x-x_0)}) + y'_0(-e^{x-x_0} + e^{2(x-x_0)}) + (y''_0 - 3y'_0 + 2y_0)\left(\frac{1}{2} - e^{x-x_0} + \frac{1}{2}e^{2(x-x_0)}\right) + (y'''_0 - 3y''_0 + 2y'_0)\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x - x_0) - e^{x-x_0} + \frac{1}{4}e^{2(x-x_0)}\right) + \ldots$

5. Предлагаемые разложения могут оказаться более удобными для приближенного представления решений «квазилинейных» дифференциальных уравнений (13), когда «линейная» часть $L(y)$ содержит постоянные коэффициенты.

На современных ЭЦВМ соответствующие вычисления принципиально не сложнее, чем с многочленами, ибо функции $u_i(x)$ — линейные комбинации степенных, экспоненциальных и тригонометрических функций, являющихся стандартными функциями в алгоритмических языках.

Переход к интегральным уравнениям (10) позволяет естественно обобщить понятие решения на случай разрывных функций f, если только они интегрируемы; доказать, используя итерации, теоремы существования (на основе принципа сжатых отображений, например), получая более гибкие оценки, зависящие от выбора оператора $L[y]$. Если решения уравнения (10) близки к многообразию, порождаемому формулой (7) «L-многочленов Тейлора», то представление (4) будет эффективным. Так, для решений уравнения $y'' = f(x, y, y')$, близких к периодическим с частотой ω, будем иметь

$$y(x) = y_0 \cos\omega(x - x_0) + y'_0 \frac{\sin\omega(x - x_0)}{\omega} + \frac{1}{\omega}\int_{x_0}^{x} F(t, y(t), y'(t)) \times \sin\omega(x - t)\,dt, \tag{14}$$

$$y'(x) = -y_0\omega \sin\omega(x - x_0) + y'_0 \cos\omega(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} F(\mathrm{idem}) \times \cos\omega(x - t)\,dt.$$

Это порождает численный метод

$$y_n = ay_{n-1} + by'_{n-1} + cF_{n-1}, \quad y'_n = -\omega^2 by_{n-1} + ay'_{n-1} + bF_{n-1}, \tag{15}$$

где $a = \cos\omega h$, $b = \frac{\sin\omega h}{\omega}$, $c = (1 - \cos\omega h)/\omega^2$, $F = f + \omega^2 y$, $F_k = F(x_k, y_k, y'_k)$, $x_k = x_0 + kh$, $y_k \simeq y(x_k)$, а h — постоянный шаг интегрирования.

Если искомое решение близко к синусоидальному с частотой ω, то формулы (15), будучи по объему вычислений эквивалентными методу Эйлера, допускают большой шаг интегрирования при приемлемой погрешности. Они заменяют интегральную кривую ломаной из синусоидальных звеньев, имеющих поле направлений, определяемое уравнением. Можно показать, что формулы (15) выражают известный δ-метод [3] графического решения задач теории колебаний.

Представление (10) удобно и для решения линейных уравнений с запаздывающим аргументом $L[y(t)] = f(t, y(t - \tau))$, эквивалентных интегральному уравнению $y(t) = T_L(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} u_n(t - z) f(z, y(z - \tau))\, dz$. Для вычисления интеграла здесь можно использовать тот или иной метод квадратур, например метод трапеций.

6. Формулы (14) позволяют изучать и установившиеся режимы колебаний с частотой ω. Для таких режимов должны выполняться условия периодичности:

$$\int_0^{2\pi/\omega} F(t, y(t), y'(t)) \sin \omega t dt = 0, \qquad \int_0^{2\pi/\omega} F(t, y(t), y'(t)) \cos \omega t dt = 0. \tag{16}$$

Интегральные уравнения первого рода (16) можно, как и уравнения (14), решать методом последовательных приближений. В начальном приближении (особенно для решений, близких к гармоническим), естественно положить

$$y_0(x) = y_0 \cos \omega x + \frac{y_0'}{\omega} \sin \omega x, \quad y_0'(x) = -y_0 \omega \sin \omega x + y_0' \cos \omega x. \tag{17}$$

Это дает для отыскания соответствующих начальных условий y_0 и y_0' систему

$$\int_0^{2\pi} F(\varphi/\omega, y_0(\varphi), y_0'(\varphi)) \sin \varphi d\varphi = 0, \qquad \int_0^{2\pi} F(\varphi/\omega, y_0(\varphi), y_0'(\varphi)) \cos \varphi d\varphi = 0. \tag{18}$$

Нетрудно видеть, что уравнения (18) появляются в любом варианте метода малого параметра [4, 5]. Предположение о малости функции F соответствует, очевидно, допущению о близости искомого решения к гармоническому с частотой ω и может быть использовано для эффективной оценки сходимости метода последовательных приближений.

При изучении автоколебаний, приняв за $x_0 = 0$ тот момент времени, когда $y_0' = 0$, беря начальное приближение $y_0(x) = y_0 \cos \omega x$, $y_0'(x) = -y_0 \omega \sin \omega x$ с неизвестным ω, для отыскания y_0 и ω в начальном приближении получим систему

$$\begin{aligned} P_1(y_0, \omega) &= \int_0^{2\pi} F(y_0 \cos \varphi, -y_0 \omega \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi = 0, \\ P_2(y_0, \omega) &= \int_0^{2\pi} F(y_0 \cos \varphi, -y_0 \omega \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi = 0. \end{aligned} \tag{18a}$$

Теперь по формулам (14) нетрудно образовать первое приближение и т. д.

7. Для двухточечной краевой задачи

$$y'' = f(x, y, y'), \; y(a) = A, \; y(b) = B \tag{19}$$

заменой $x = a + t$, $y = A + \frac{B - A}{b - a} t + z$ получаем

$$z'' = \varphi(t, z, z'), \; z(0) = z(l) = 0, \; l = b - a, \tag{19a}$$

где $\varphi(t, z, z') = f\left(a + t, A + \frac{B - A}{b - a} t + z, \frac{B - A}{b - a} + z'\right)$.

Нетрудно видеть, что задача (19а) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$z(t) = z_0' \frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi t}{l} + \frac{l}{\pi} \int_0^t \varphi(\tau, z(\tau), z'(\tau)) \sin \frac{\pi \tau}{l} \, d\tau, \qquad z'(t) = z_0' \cos \frac{\pi t}{l} + \int_0^t \varphi(\tau, z(\tau), z'(\tau)) \cos \frac{\pi \tau}{l} \, d\tau. \tag{20}$$

При этом решение $z(t)$ должно удовлетворять условию «периодичности»:

$$\int_0^l \varphi(\tau, z(\tau), z'(\tau)) \sin \frac{\pi \tau}{l} \, d\tau = 0. \tag{21}$$

Беря в начальном приближении $z_0(t) = z_0' \frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi t}{l}$, из (21) получим уравнение для определения z_0':

$$P(z_0') = \int_0^l \varphi\left(\tau, z_0' \frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi \tau}{l}, z_0' \cos \frac{\pi \tau}{l}\right) \sin \frac{\pi \tau}{l} \, d\tau = 0.$$

Теперь выражения (20) позволяют найти первое приближение $z_1(t) = z_0' \frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi t}{l} + \frac{l}{\pi} \int_0^t \varphi(\tau, z_0(\tau), z_0'(\tau)) \sin \frac{\pi \tau}{l} \, d\tau$, и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.— 3-е изд.— М.: Высшая школа, 1967.— 563 с.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.— 3-е изд.— М.—Л.: Гостехиздат, 1957.
3. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле.— М.: Физматгиз, 1959.— 439 с.
4. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний.— М.: Гостехиздат, 1956.— 492 с.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Физматгиз, 1963.— 410 с.

Донецкий
политехнический институт

Поступила в редакцию 20.VII 1978 г.;
после переработки — 29.I 1980 г.