УДК 517.55

М. М. Цвиль

Двойные ряды Фабера

1. Пусть $i = 1, 2$; K_i — ограниченный континуум в плоскости z_i, дополнение которого есть односвязная область D_i^-; D_i^+ — совокупность внутренних точек континуума K_i; L_i — его граница; $D^{\pm\pm} = D_1^{\pm} \times D_2^{\pm}$; $\sigma = \sigma(D^{\pm\pm})$ — естественным образом ориентированный остов biобластей $D^{\pm\pm}$; $w_i = \varphi_i(z_i)$ — функция, конформно отображающая область D_i^- на дополнение единичного круга при условиях $\varphi_i(\infty) = \infty$ и $\varphi_i'(\infty) > 0$; $z_i = \psi_i(w_i)$ — обратная к $\varphi_i(z_i)$ функция; L_{ir} — образ окружности $|w_i| = r$, $r > 1$ при отображении $\psi_i(w_i)$ и

$L_i = L_{i1}$; D_{ir}^{+} — ограниченная, а D_{ir}^{-} — неограниченная область с границей L_{ir}; $D_{rs}^{\pm\pm} = D_{1r}^{\pm} \times D_{2s}^{\pm}$; $A_i(t_i, w_i) = \psi_i'(t_i)/\psi_i(t_i) - \psi_i(w_i)$; $F_i(t_i, w_i) = A_i(t_i, w_i) - 1/t_i - w_i$; $U^{\pm\pm} = \{|w_1| \lessgtr 1, |w_2| \lessgtr 1\}$; $T^2 = \{|w_1| = 1, |w_2| = 1\}$, $(\psi^* f)(w_1, w_2) = f[\psi_1(w_1), \psi_2(w_2)]$; $C(p, \alpha)$ — класс замкнутых спрямляемых жордановых кривых, в уравнении которых $z = z(s)$, где s — длина дуги, периодическая функция $z(s)$ непрерывно дифференцируема p раз, причем $z^{(p)}(s) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ и $0 < \alpha < 1$; $H_{\alpha_1\alpha_2}(\bar{D}^{++})$ — класс функций двух переменных, удовлетворяющих на множестве $\bar{D}^{++}$ условию Гельдера с показателями α_1 и α_2 $(0 < \alpha_1, \alpha_2 \leqslant 1)$; $W_{(\alpha_1\alpha_2)}(\bar{D}^{++})$ — множество аналитических в биобласти D^{++} функций $f(z_1, z_2)$, каждая из которых $f(z_1, z_2) \in H_{\alpha_1\alpha_2}(\bar{D}^{++})$; $\{\Phi_{nm}(z_1, z_2)\}_{n,m=0}^{\infty}$ — последовательность R-полиномов Фабера двух переменных, определенных с помощью производящей функции [1]:

$$\frac{R(w_1, w_2)\,\psi_1'(w_1)\,\psi_2'(w_2)}{[\psi_1(w_1) - z_1]\,[\psi_2(w_2) - z_2]} = \sum_{n,m\geqslant 0} \frac{\Phi_{nm}(z_1, z_2)}{w_1^{n+1} w_1^{m+1}}, \quad (w_1, w_2) \in U^{--},$$

$$(z_1, z_2) \in K_1 \times K_2,$$

где $R(w_1, w_2) = (\psi^* g)(w_1, w_2)$ и весовая функция $g(z_1, z_2)$ аналитическая в биобласти D^{--}, причем $g(\infty, \infty) > 0$.

Для полиномов $\{\Phi_{nm}(z_1, z_2)\}$, как и при $n = 1$ (ср. [2]) имеют место интегральные представления

$$\Phi_{nm}(z_1, z_2) = \begin{cases} \mathcal{E}_{nm}(z_1, z_2), \quad (z_1, z_2) \in D_{rs}^{++}, \\ \varphi_1^n(z_1)\,\mathcal{E}_m^{(2)}(z_1, z_2) + \mathcal{E}_{nm}(z_1, z_2), \ (z_1, z_2) \in D_{rs}^{-+}, \\ \varphi_2^m(z_2)\,\mathcal{E}_n^{(1)}(z_1, z_2) + \mathcal{E}_{nm}(z_1, z_2), \ (z_1, z_2) \in D_{rs}^{+-}, \\ g(z_1, z_2)\,\varphi_1^n(z_1)\,\varphi_2^m(z_2) + \varphi_1^n(z_1)\,\mathcal{E}_m^{(2)}(z_1, z_2) + \\ + \varphi_2^m(z_2)\,\mathcal{E}_n^{(1)}(z_1, z_2) + \mathcal{E}_{nm}(z_1, z_2), \ (z_1, z_2) \in D_{rs}^{--}, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$\mathcal{E}_{nm}(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{L_{1r} \times L_{2s}} \frac{g(\zeta_1, \zeta_2)\,\varphi_1^n(\zeta_1)\,\varphi_2^m(\zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}\, d\zeta_1 d\zeta_2,$$

$$\mathcal{E}_p^{(k)}(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_k} \frac{g(z_1, z_2)|_{z_k = \zeta_k}\,\varphi_k^p(\zeta_k)}{\zeta_k - z_k}\, d\zeta_k$$

и $p = n$, $\Gamma_1 = L_{1r}$ ($p = m$, $\Gamma_2 = L_{2s}$), если $k = 1$ ($k = 2$). В случае спрямляемости контуров L_1, L_2 и, например, равномерной ограниченности весовой функции $g(z_1, z_2)$ в биобласти D^{--} в формулах (1) можно полагать $r = s = 1$.

2. Пусть L_1 и L_2 — замкнутые спрямляемые жордановы кривые. Через E_p, $p > 0$, обозначим (см. [3]) класс аналитических в биобласти D^{++} функций $f(z_1, z_2)$, для которых $\iint\limits_{\gamma_{1n} \times \gamma_{2m}} |f(z_1, z_2)|^p\, |dz_1|\, |dz_2| < +\infty$, где $\{\gamma_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\gamma_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ — последовательности спрямляемых кривых, сходящихся соответственно к кривым L_1 и L_2.

Примитивной функцией порядка (p, q) от $f(z_1, z_2)$ назовем всякую функцию $f(z_1, z_2)$, удовлетворяющую условию

$$\frac{\partial^{p+q} f_{(p,q)}(z_1, z_2)}{\partial z_1^p \partial z_2^q} = f(z_1, z_2).$$

Далее сформулируем условия, достаточные для разложения функций $f(z_1, z_2)$ в двойной ряд Фабера:

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k,l\geqslant 0} a_{kl}\Phi_{kl}(z_1, z_2), \quad (z_1, z_2)\in D^{++}, \tag{2}$$

сходящийся равномерно внутри биобласти D^{++} (ср. [2, § 3] и [4]).

Теорема 1. *Если весовая функция $g(z_1, z_2)$ отлична от нуля и имеет в замкнутой биобласти $\bar{D}^{--}$ непрерывные частные производные $\partial^{k+l}g/\partial z_1^k\partial z_2^l$, $0\leqslant k\leqslant p+1$, $0\leqslant l\leqslant q+1$, причем $\partial^{p+1+l}g/\partial z_1^{p+1}\partial z_2^l$, $\partial^{k+q+1}g/\partial z_1^k\partial z_2^{q+1}\in H_{\alpha\beta}(\bar{D}^{--})$, а кривые $L_1\in C(p+2, \alpha)$ и $L_2\in C(q+2, \beta)$, то всякая функция $f(z_1, z_2)$, у которой примитивная порядка (p, q) принадлежит в биобласти D^{++} классу E_1, разлагается в двойной ряд Фабера (2), сходящийся абсолютно и равномерно внутри D^{++}.*

Теорема 2. *Если $0< m\leqslant |g(z_1, z_2)|\leqslant M<\infty$ для $(z_1, z_2)\in\bar{D}^{--}$ и кривые L_i, $i=1,2$, таковы, что $\psi'(w_i)$ принадлежат классу Харди H_r, то каждая функция $f(z_1, z_2)$ из класса E_s,* где $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1, r, s>1$, *удовлетворяющая неравенству $\iint\limits_{\sigma} |f(\zeta_1, \zeta_2)|^s\, |\varphi_1'(\zeta_1)|\, |\varphi_2'(\zeta_2)|\, |d\zeta_1|\, |d\zeta_2|<\infty$, представима своим рядом Фабера (2), сходящимся равномерно внутри D^{++}.*

3. Если аналитическая в биобласти D^{++} функция $f(z_1, z_2)$ является непрерывной в замкнутой биобласти $\bar{D}^{++}$, то естественно рассматривать сходимость двойного ряда (2) в замкнутой биобласти $\bar{D}^{++}$. Как и в случае одного переменного (ср. [5, § 7]) справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если кривые $L_i\in C(1, \varepsilon_i)$, $i=1,2$, а весовая функция $g(z_1, z_2)\in W_{(\alpha_1\alpha_2)}(\bar{D}^{--})$ и отлична от нуля в $\bar{D}^{--}$, то для всякой функции $f(z_1, z_2)$, аналитической в D^{++} и непрерывной в $\bar{D}^{++}$, выполняется неравенство*

$$\Big|f(z_1, z_2)-\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} f_{kl}\Phi_{kl}(z_1, z_2)\Big|\leqslant c_1E_{nm}(f, \bar{D}^{++})\ln n\ln m, \quad (z_1, z_2)\in\bar{D}^{++},$$

где

$$f_{kl}=\frac{1}{(2\pi i)^2}\iint\limits_{T^2}\frac{(\psi^*f)(t_1, t_2)}{(\psi^*g)(t_1, t_2)}\,\frac{dt_1}{t_1^{k+1}}\,\frac{dt_2}{t_2^{l+1}}, \tag{3}$$

c_1 — положительная постоянная, а $E_{nm}(f, \bar{D}^{++})$ — наилучшее равномерное приближение полиномами бистепени (n, m) в замкнутой биобласти $\bar{D}^{++}$.

Пусть кривые $L_k\in C(1, \beta_k)$, $f(z_1, z_2)\in W_{(\alpha_1\alpha_2)}(\bar{D}^{++})$, а весовая функция $g(z_1, z_2)\in W_{(\gamma_1\gamma_2)}(\bar{D}^{--})$ и отлична от нуля в $\bar{D}^{--}$. Рассмотрим интеграл типа Коши:

$$h(w_1, w_2)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\iint\limits_{T^2}\frac{(\psi^*f)(t_1, t_2)}{(\psi^*g)(t_1, t_2)}\,\frac{dt_1}{t_1-w_1}\,\frac{dt_2}{t_2-w_2}, \tag{4}$$

плотность которого удовлетворяет условию Гельдера с показателями $\eta_k = \min(\alpha_k\beta_k, \gamma_k\beta_k)$, $k=1, 2$. Интеграл (4) определяет четыре функции $h^{\pm\pm}(w_1, w_2)$, аналитические в соответствующих биобластях $U^{\pm\pm}$ и удовлетворяющие в $\bar{U}^{\pm\pm}$ условию Гельдера с показателями $(\eta_1-\varepsilon, \eta_2-\varepsilon)$, где ε — сколь угодно малое положительное число [6]. В силу формул Ю. В. Сохоцкого [6] на остове единичного бикруга имеем

$$(\psi^* f)(w_1, w_2) = (\psi^* g)(w_1, w_2)\,[h^{++}(w_1, w_2) - h^{+-}(w_1, w_2) - \\ - h^{-+}(w_1, w_2) + h^{--}(w_1, w_2)].$$

Справедлива (ср. [5, § 7]) следующая теорема.

Теорема 4. *Если $L_k \in C(1, \beta_k)$, а весовая функция $g(z_1, z_2) \neq 0$ и принадлежит классу $W_{(\gamma_1\gamma_2)}(\bar{D}^{--})$, то любой функции $f(z_1, z_2) \in W_{(\alpha_1\alpha_2)}(\bar{D}^{++})$ на остове бионбласти D^{++} при $w_k = \varphi_k(z_k)$ соответствует интегральное представление*

$$f(z_1, z_2) = g(z_1, z_2)\, h^{++}(w_1, w_2) + \frac{1}{2\pi i}\iint_{T^2} h^{++}(t_1, t_2)\, F\begin{pmatrix} t_1 w_1 & g \\ t_2 w_2 & \end{pmatrix} dt_1 dt_2 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{|t_1|=1} h^{++}(t_1, w_2)\, F_1\begin{pmatrix} w_2 & g \\ t_1 w_1 & \end{pmatrix} dt_1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{|t_2|=1} h^{++}(w_1, t_2)\, F_2\begin{pmatrix} w_1 & g \\ t_2 w_2 & \end{pmatrix} dt_2, \tag{5}$$

где

$$F\begin{pmatrix} t_1 w_1 & g \\ t_2 w_2 & \end{pmatrix} = \frac{(\psi^* g)(w_1, w_2)}{(t_1 - w_1)(t_2 - w_2)} - (\psi^* g)(w_1, t_2)\,\frac{A_2(t_2, w_2)}{t_1 - w_1} - \\ - (\psi^* g)(t_1, w_2)\,\frac{A_1(t_1, w_1)}{t_2 - w_2} + (\psi^* g)(t_1, t_2)\, A_1(t_1, w_1)\, A_2(t_2, w_2) \tag{6}$$

и

$$F_i\begin{pmatrix} w_k & g \\ t_i w_i & \end{pmatrix} = (\psi^* g)(w_1, w_2)\Big|_{w_i = t_i} A_i(t_i, w_i) - \frac{(\psi^* g)(w_1, w_2)}{t_i - w_i}, \tag{7}$$

$$i, k = 1, 2,\ k \neq i,\ |t_i| > 1,\ |w_i| > 1.$$

Каждой функции $f(z_1, z_2) \in W_{(\alpha_1\alpha_2)}(\bar{D}^{++})$ с помощью коэффициентов f_{kl}, определяемых формулой (3), поставим в соответствие двойной ряд Фабера. Пользуясь тем, что коэффициенты Фабера f_{kl} равны коэффициентам Тейлора функции $h^{++}(w_1, w_2)$, выразим остаток ряда Фабера $R^f_{nm}(z_1, z_2)$ функции $f(z_1, z_2)$ при $(z_1, z_2) \in \sigma$ через остаток ряда Тейлора функции $h^{++}(w_1, w_2)$. Полагая $w_k = \varphi_k(z_k)$ и используя формулы (1), (6), (7), (5) в условиях теоремы 4, находим, что

$$R^f_{nm}(z_1, z_2) = g(z_1, z_2)\left[h^{++}(w_1, w_2) - \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} f_{kl} w_1^k w_2^l\right] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{|t_2|=1}\left[h^{++}(w_1, t_2) - \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} f_{kl} w_1^k t_2^l\right] F_2\begin{pmatrix} w_1 & g \\ t_2 w_2 & \end{pmatrix} dt_2 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{|t_1|=1}\left[h^{++}(t_1, w_2) - \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} f_{kl} t_1^k w_2^l\right] F_1\begin{pmatrix} w_2 & g \\ t_1 w_1 & \end{pmatrix} dt_1 +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi i)^2}\iint_{T^2}\left[h^{++}(t_1, t_2) - \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} f_{kl} t_1^k t_2^l\right] F\begin{pmatrix} t_1 & w_1 & g \\ t_2 & w_2 & \end{pmatrix} dt_1 dt_2. \tag{8}$$

Пусть $\lambda_{kl}^{(nm)}$ — система чисел, удовлетворяющая теоремам I и II статьи [7], тогда в силу (8) и работ [7, 8] справедлива теорема.

Теорема 5. *В условиях теоремы* 4 *при* $(z_1, z_2) \in \bar{D}^{++}$ *имеет место неравенство*

$$\left| f(z_1, z_2) - \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} \lambda_{kl}^{(nm)} f_{hl} \Phi_{hl}(z_1, z_2) \right| < c_2 \left(\frac{1}{n^{\eta_1 - \varepsilon}} + \frac{1}{m^{\eta_2 - \varepsilon}} \right),$$

где c_2 — *положительная постоянная.*

4. Пусть G — логарифмически выпуклая полная двоякокруговая область в пространстве переменных w_1, w_2, содержащая $\bar{U}^{++}$. В теореме 2 статьи [9] указаны необходимые и достаточные ограничения на коэффициенты $\{a_{kl}\}$, при которых область G содержится в области сходимости G^* ряда $\sum\limits_{k+l \geqslant 0} a_{kl} w_1^k w_2^l$. Будем предполагать эти условия выполненными. В свою очередь (см. [10]) область G^* исчерпывается бикругами $\{|w_1| < r, |w_2| < s\}$, где s и $r = \mu(s)$ — сопряженные радиусы сходимости, удовлетворяющие равенству

$$\overline{\lim_{k+l \to \infty}} \sqrt[k+l]{|a_{kl}| r^k s^l} = 1, \tag{9}$$

причем функция $r = \mu(s)$ непрерывна, не возрастает и логарифмически выпукла на некотором интервале $(0, R^*)$.

Пусть $(z_1, z_2) \in D^{--}$, $z_i = \psi_i(w_i)$, $i = 1, 2$. Используя (9) и теорему 3.3 из работы [1], найдем, что двойной ряд Фабера с коэффициентами $\{a_{kl}\}$ абсолютно и равномерно сходится в области $D = \bigcup\limits_{r,s} D_{rs}^{++}$ и расходится в $\bigcup\limits_{r,s} D_{rs}^{--}$, $r = \mu(s)$, $s > 1$. При $(z_1, z_2) \in D^{-+}$ в силу формулы (1), где $r = s = 1$, двойной ряд Фабера, стоящий в правой части равенства (2) представим в виде суммы:

$$\sum_{k,l \geqslant 0} a_{kl} \varphi_1^k(z_1) \mathscr{E}_l^{(2)}(z_1, z_2) + \sum_{k,l \geqslant 0} a_{kl} \mathscr{E}_{kl}(z_1, z_2), \ (z_1, z_2) \in D^{-+}.$$

При условиях, обеспечивающих равномерную ограниченность функции $\mathscr{E}_{kl}(z_1, z_2)$ и выполнение неравенства $0 < \delta_1 \leqslant |\mathscr{E}_l^{(2)}(z_1, z_2)| \leqslant \delta_2 < \infty$, $(z_1, z_2) \in D^{-+}$, можно показать, что ряд Фабера (2) абсолютно и равномерно сходится в области $\{(z_1, z_2): |\varphi_1(z_1) < \mu(1); z_2 \in D_2^+\}$. Аналогичное утверждение имеет место и при $(z_1, z_2) \in D^{+-}$. Таким образом, в наших предположениях двойной ряд Фабера (2) сходится абсолютно и равномерно только при $(z_1, z_2) \in \bigcup\limits_{r,s} D_{rs}^{++}$, где $r = \mu(s) \geqslant 1$ и $s \geqslant 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цвиль М. М. Разложение голоморфных функций по R-полиномам Фабера двух переменных.— В кн.: Теория функций, дифференциальные уравнения и их приложения. Элиста, 1976, с. 14—22.
2. Суетин П. К. Основные свойства многочленов Фабера.— Успехи мат. наук, 1964, 19, вып. 4, с. 125—154.
3. Джваршейшвили А. Г. О граничных свойствах аналитических функций многих переменных.— Тр. Тбил. мат. ин-та, 1963, т. 29, с. 147—167.
4. Суетин П. К. Многочлены Фабера для областей с неаналитическими границами.— ДАН СССР, 1953, 88, № 1, с. 25—28.
5. Суетин П. К. Ряды по многочленам Фабера и некоторые их обобщения.— Современные проблемы математики: Итоги науки и техники. М., 1975, т. 5, с. 73—140.
6. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— 3-е изд. перераб. и доп.— М.: Наука, 1977.— 640 с.
7. Пономаренко В. Г. О линейных процессах приближения непрерывных периодических функций двух переменных.— В кн.: Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций.— М.: Физматгиз, 1961, с. 241—243.
8. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1969.— 480 с.

9. Б е з д у д н ы й Г. М. Об изоморфизме и продолжаемости базисов пространств функций, голоморфных в n-круговых областях.— Уч. зап. Моск. обл. пединститут, 1966, **166**, вып. 10, с. 109—137.
10. Ф у к с Б. А. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных.— М. : Физматгиз, 1962.— 419 с.

Ростовский
государственый университет

Поступила в редакцию
24.I 1978 г.