УДК 517.944

Н. Н. Чаус

Замечание о поведении решений задачи Коши для уравнения с переменными коэффициентами

В работе устанавливаются условия на поведение решения задачи Коши на бесконечности, гарантирующие его единственность. Способ получения результата связан с сильным огрублением вопроса и поэтому в конкретных случаях приведенные условия могут оказаться достаточно жесткими. С известными классами единственности решения задачи Коши для уравнений с постоянными коэффициентами [1] сформулированные здесь условия не пересекаются. Главная черта новых условий заключается в их несимметричности по пространственным переменным.

В работе приведены два примера: для уравнения с постоянными и с переменными коэффициентами. Несмотря на грубость метода получения результата, оба примера показывают, что в общем случае полученная теорема не может быть существенно улучшена.

1. Формулировка результата. Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = R\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)u + P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u, \tag{1}$$

где $R\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$ — полином степени $r \geqslant 0$ от $\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}$ с постоянными коэффициентами и

$$P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = a_0 \frac{\partial^p}{\partial x^p} + a_1(x)\frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}} + \ldots + a_p(x) \quad (p > 1).$$

Предполагается, что $a_0 = \mathrm{const} \neq 0$, коэффициенты $a_i(x)$ непрерывны и допускают при $x > 0$ оценки $|a_i(x)| \leqslant A(1+x)^{\alpha_i}$ $(A, \alpha_i \geqslant 0)$.

Для уравнения (1) ставится задача нахождения в области $t \in [0, T]$, $-\infty < x,\ y_i < \infty$ решения $u(t, x, y)$, удовлетворяющего условию

$$u(0, x, y) = 0. \tag{2}$$

Теорема. *Пусть* $q > 1$ *такое, что* $R_q \equiv \frac{1}{p}\max\left[1, \left(1 - \frac{1}{q}\right)r\right] < 1$. *Если решение* $u(t, x, y)$ *задачи Коши* (1), (2) *удовлетворяет в области* $t \in [0, T]$, $x > 0$, $-\infty < y_i < \infty$ *условиям*

$$\left|\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right| \leqslant C\exp\{-x^{q_1+\varepsilon} + a\|y\|^q\}, \quad i = 0, 1, \ldots, p-1,$$

где $C, a, \varepsilon > 0$, $\|y\|^2 = \Sigma|y_i|^2$, $q_1 = \max\left\{\frac{1}{1-R_q}, \frac{1+\alpha_1}{p(1-R_q)}, 1+\alpha_1, 1-\alpha_1+\alpha_2, \ldots, 1-\alpha_{p-1}+\alpha_p\right\}$, *то оно тождественно равно нулю.*

Доказательство. Сформулированные в теореме условия на решение задачи Коши $u(t, x, y)$ обеспечивают его тривиальность в области $t \in [0, T]$, $x > 0$, $-\infty < y_i < \infty$, так как любое решение уравнения (1) (без дополнительного условия $u(0, x, y) = 0$) с тем же поведением на бесконечности равно в этой области нулю [2]. Сдвигая предполагаемое решение вдоль оси x- в, приходим к решению $u_1(t, x, y)$ уравнения, отличающегося от уравнения (1), но с коэффициентами с теми же свойствами. Поэтому $u(t, x, y) = 0$ при $x > h$ $(h < 0)$, т. е. при всех x.

Таким образом, сформулированная теорема — грубое следствие полученного ранее результата, когда от решения $u(t, x, y)$ уравнения (1) не требовалось дополнительного ограничения $u(0, x, y) = 0$. Покажем на примерах уравнения с постоянными и с переменными коэффициентами, что учет условия $u(0, x, y) = 0$ не может в общем случае привести к качественному улучшению полученного результата. Будут построены нетривиальные решения задачи Коши (1), (2), поведение которых на бесконечности удовлетворяет требованиям теоремы с $\varepsilon = 0$.

2. Пример 1. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u(0, x, y) = 0.$$

Пусть $q > 2$. Тогда согласно теореме из ограничения

$$|u| + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant C \exp\{-x^{q+\varepsilon} + a|y|^q\} \quad (\varepsilon > 0)$$

следует тривиальность решения $u(t, x, y)$.

Покажем, что существуют такие нетривиальные решения этой задачи Коши, которые подчиняются последней оценке с $\varepsilon = 0$. Из соображений технического удобства одно из решений будет построено с требуемым убыванием не при $x \to +\infty$, а при $x \to -\infty$.

Пусть $\alpha(t)$ — гладкая, неубывающая при $t \to \infty$ функция и $\alpha(t) = 0$ при $t \leqslant 0$. Обозначим

$$(I\alpha)(x) = \int_0^x \alpha(x_1)\, dx_1, \quad (I^n\alpha)(x) = \int_0^x dx_1 \ldots \int_0^{x_{n-1}} \alpha(x_n)\, dx_n \quad (n > 1).$$

Рассмотрим ряд

$$u_0(t, x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} b^{(k)}(t) \frac{(x-y)^k}{4^k k!} (I^k\alpha)(x+y),$$

где $b(t)$ — бесконечно дифференцируемая при $t \in [0, T]$ функция, для которой: $|b^{(k)}(t)| \leqslant k^{(1+\delta)k}$, $b^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \ldots$. При произвольном $\delta > 0$ такие нетривиальные $b(t)$ существуют [3]. Непосредственно проверяется, что $u_0(t, x, y)$ формально удовлетворяет исходному уравнению. Из оценки $|(I^k\alpha)(x+y)| \leqslant \frac{|x+y|^k}{k!}\alpha(x+y)$ и оценок на $|b^{(k)}(t)|$ следует, что $u_0(t, x, y)$ будет решением исходного уравнения во всей области $t \in [0, T]$, $-\infty < x$, $y_i < \infty$. Понятно, что $u(0, x, y) = 0$. В области $t \in [0, T]$, $x < 0$, $-\infty < y_i < \infty$ исследуем зависимость решения $u_0(t, x, y)$ от функции $\alpha(t)$. Так как $\alpha(x+y) = 0$ при $x + y < 0$, то $u_0(t, x, y) = 0$ при $x + y < 0$ и, значит,

$$|u_0| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} k^{(1+\delta)k} \frac{|x^2-y^2|^k}{4^k k!^2} \alpha(x+y) \leqslant \alpha(x+y) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^k |x^2-y^2|^k}{k!^{1-\delta}} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha(x+y) \exp\{C_0 (y^2 - x^2)^{\frac{1}{1-\delta}}\}.$$

В полученной оценке для $|u_0|$ положим $\alpha(t) = \exp t^q$ при $t > 1$, $q > 2$. В области, где проводится оценка решения u_0, имеем $(x+y)^q \leqslant (x+y)^q + |y|^q - |x|^q \leqslant 2|y|^q - |x|^q$, $C_0(y^2 - x^2) \leqslant C_0|y|^2$, откуда

$$\alpha(x+y)\exp\{C_0(y^2-x^2)^{\frac{1}{1-\delta}}\} \leqslant C_1\exp\{-|x|^q + 2|y|^q + C_0|y|^{\frac{2}{1-\delta}}\}.$$

Величину $\delta > 0$ в правой части последнего неравенства будем считать настолько малой, чтобы было $q > \dfrac{2}{1-\delta}$. В результате приходим к такой оценке построенного решения $u_0(t, x, y)$ в области $t \in [0, T]$, $x < 0$, $-\infty < y_i < \infty$: $|u_0| \leqslant C_1\exp\{-|x|^q + C_2|y|^q\}$ с некоторыми константами $C_1, C_2 > 0$. Точно такая же оценка в названной области оказывается справедливой (легко проверить) и для $\left|\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\right|$, чем построение примера закончено.

Пример 2. Положим $\Theta(\xi) = \exp|\xi|^q$ $(q > 2)$ и рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\Theta'(x)}{\Theta(x)}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Theta''(x)}{\Theta(x)}u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x)u,$$

$$u(0, x) = 0.$$

Имеем $|a_1(x)| = q|x|^{q-1}$, $|a_2(x)| \leqslant q(q-1)|x|^{q-2} + q^2|x|^{2(q-1)}$, так что фигурирующие в теореме параметры в данном случае имеют значения: $r = 0$, $p = 2$, $\alpha_1 = q - 1$, $\alpha_2 = 2(q-1)$, $R_q = \dfrac{1}{2}$, $q_1 = q$. Следовательно, по теореме, всякое решение приведенной задачи Коши, подчиняющееся при $t \in [0, T]$, $x > 0$ с некоторым $\varepsilon > 0$ ограничению $|u| + \left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant C\exp\{-x^{q+\varepsilon}\}$, тождественно равно нулю. Покажем, что если ослабить последнее ограничение, полагая $\varepsilon = 0$, то нетривиальные решения задачи уже́ будут существовать. Для этого возьмем решение $v_0(t, x) \not\equiv 0$ задачи Коши $\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $v(0, x) = 0$, удовлетворяющее условию $|v_0| + \left|\dfrac{\partial v_0}{\partial x}\right| \leqslant C\exp[\delta_1|x|^q]$, где $\delta_1 > 0$ — достаточно мало [4]. Введем в рассмотрение функцию $u_0(t, x) = v_0(t, x) \times \exp(-|x|^q)$. Легко видеть, что $u_0(t, x)$ — решение исходной задачи Коши и удовлетворяет оценке

$$|u_0| + \left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right| \leqslant C\exp\{-(1-\delta)|x|^q\} \quad (\delta > 0).$$

Построение примера закончено. Для наглядности добавим, что для уравнения с полиномиальными коэффициентами $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8x^3\dfrac{\partial u}{\partial x} + (12x^2 + 16x^6)u$ нетривиальные решения задачи Коши с $u(0, x) = 0$ появятся при ограничении $|u| + \left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant C\exp\{-(1-\delta)|x|^4\}$ $(\delta > 0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 3.— М.: Физматгиз, 1958.— 275 с.
2. Чаус Н. Н. Об асимптотике решений уравнений в частных производных с переменными коэффициентами.— Укр. мат журн., 1978, 30, № 2, с. 270—273.

3. Мандельбройт С. Квазианалитические классы функций.— Л—М.: ОНТИ, 1937.— 107 с.
4. Тихонов А. Н. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности.— Мат. сборник, 1935, 42, № 2, с. 199—216.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
6.VI 1979 г.