УДК 519.41/47

Н. С. Черников

О произведении почти абелевых групп

Известная теорема Ито утверждает, что всякая группа G, факторизуемая двумя абелевыми подгруппами A и B,— разрешимая группа ступени не выше 2 (см. [1]). Эта теорема до последнего времени была единственным общим результатом, относящимся к факторизациям произвольных групп. В настоящей работе получено следующее предложение, являющееся первым прямым обобщением теоремы Ито.

Теорема. *Группа G, факторизуемая двумя подгруппами A и B, конечными над своими центрами, почти разрешима.*

Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма. *Пусть F — группа, факторизуемая такими бесконечными подгруппами P и Q, что* $|P:Z(P)|<\infty$ и $|Q:Z(Q)|<\infty$. *Тогда найдутся неединичные элементы $g\in Z(P)$ и $h\in Z(Q)$, для которых группа $\langle [g,h]^{\bar{g}}, \bar{g}\in P\rangle$ абелева.*

Доказательство этой леммы выкладочное и здесь не приводится.

Доказательство теоремы. Заметим прежде всего, что класс почти разрешимых групп замкнут относительно расширений. Этот факт, а также лемма 1 из [2] будут ниже неявно использоваться.

Пусть утверждение теоремы неверно. Тогда хотя бы один из множителей A и B ввиду теоремы Ито неабелев. Пусть для определенности множитель B неабелев.

Не теряя общности, можно считать, что сумма индексов $|A:Z(A)|$ и $|B:Z(B)|$ является наименьшей возможной и что всякий нормальный делитель группы G, содержащийся в пересечении $A\cap B$, единичен. Очевидно, $Z(A)\cap Z(B)=1$ и $|A\cap B|<\infty$. Возьмем любую подгруппу $D\supset A$, конечную над своим центром, для которой $|D:A|<\infty$. Так как, очевидно, $|D\cap B|<\infty$, $|D:C_D(D\cap B)|<\infty$, $|B:C_B(D\cap B)|<\infty$, то ввиду леммы 5.1 из [3] и леммы Дицмана (см., например, [4, с. 338]) нормальное замыкание L подгруппы $D\cap B$ в G — конечная группа. Тогда фактор-группа G/L не является почти разрешимой группой. Пользуясь этим и минимальностью суммы $|A:Z(A)|+|B:Z(B)|$, легко доказать справедливость включений $L\cap \cap B\subset Z(B)$, $L\cap A\subset Z(A)$, в силу которых $D\cap B\subset D\cap Z(B)$ и $L\cap(A\cap B)= =A\cap B\subset Z(A)\cap Z(B)=1$.

Обозначим через B_* пересечение всех подгрупп группы B, содержащих ее коммутант и перестановочных с A. Ввиду леммы 1.3 работы [3] подгруппа B_* также перестановочна с A. Нетрудно показать, что нормальное замыкание L_* подгруппы B_* в G содержится в подгруппе $A\cdot B_*$. Тогда в силу очевидного изоморфизма $B\cdot L_*/L_*\simeq B/B_*$ фактор-группа $B\cdot L_*/L_*$ абелева. Поэтому вследствие минимальности суммы $|A:Z(A)|+|B:Z(B)|$ фактор-группа G/L_* почти разрешима. Отсюда вытекает, что подгруппа $A\cdot B_*$ не является почти разрешимой группой. Ввиду определения группы B_* для любой ее собственной подгруппы C, перестановочной с A, $C\cdot Z(B)\neq B$

и потому $|C:Z(C)|\leqslant|C:(C\cap Z(B))|<|B:Z(B)|$. В силу этих неравенств группа AC почти разрешима.

Не уменьшая общности, можно считать, что $B_*=B$. Пусть $\bar{B}_0=Z(B)/Z(B), \bar{B}_1, \ldots, \bar{B}_n=B/Z(B)$ $(1\leqslant n<\infty)$ — совокупность всех различных гомоморфных образов перестановочных с A подгрупп группы B в фактор-группе $B/Z(B)$. Каждой группе $\bar{B}_i$ $(0\leqslant i\leqslant n)$ сопоставим подгруппу B_i, порожденную всеми перестановочными с A подгруппами из B, образы которых в фактор-группе $B/Z(B)$ совпадают с $\bar{B}_i$. Нетрудно убедиться, что подгруппа B_i перестановочна с A и что имеет место равенство $B_iZ(B)/Z(B)=\bar{B}_i$.

Нетрудно показать, что нормальное замыкание L_i подгруппы $B_i\cap Z(B)$ в G содержится в AB_i и, значит, при $i<n$ — почти разрешимая группа. Вследствие этого подгруппа $N=\langle L_0,\ldots,L_{n-1}\rangle$ также почти разрешима. Пусть M/N — максимальный содержащийся в $A\cdot N/N$ нормальный делитель группы G/N. Подгруппа M, как нетрудно видеть, почти разрешима. Отсюда следует, что фактор-группа G/M не является почти разрешимой группой. Тогда $|BM/M:Z(BM/M)|=|B:Z(B)|$ и потому $Z(BM/M)=Z(B)M/M$. Нетрудно проверить, что пересечение с $Z(B)M/M$ любой собственной подгруппы группы BM/M, перестановочной с AM/M, единичное. Пользуясь этим, легко показать, что всякая собственная подгруппа группы G/M, содержащая AM/M, имеет конечное пересечение с BM/M. В таком случае для любой конечной над своим центром подгруппы $D/M\subset G/M$, содержащей AM/M, $(D/M\cap BM/M)\cap Z(BM/M)=M/M$ и $|D/M:AM/M|\leqslant|D/M\cap BM/M|<\infty$. В частности, $Z(AM/M)\cap Z(BM/M)\subset A\cdot M/M\cap Z(B\cdot M/M)=M/M$. Рассуждая как и в начале доказательства, убеждаемся в справедливости включений $D/M\cap BM/M\subset D/M\cap Z(BM/M)=M/M$, $AM/M\cap BM/M\subset Z(AM/M)\cap Z(BM/M)=M/M$. Ввиду первого соотношения $D/M=AM/M$, и потому AM/M, является максимальной конечной над своим центром подгруппой группы G/M.

Далее будем считать, что $M=1$ (это, как легко видеть, не уменьшает общности рассуждений). Очевидно, подгруппы A и B бесконечны и всякий содержащийся в A нормальный делитель группы G равен единице.

Нетрудно проверить, что при любом $d\in Z(B)$ имеют место соотношения $|\langle A, A^d\rangle:A^d|=|\langle A^{d^{-1}}, A\rangle:A|=|\langle A^{d^{-1}}, A\rangle\cap B|=|\langle A, A^d\rangle\cap B|=|\langle A,A^d\rangle:A|$.

Из леммы настоящей работы вытекает существование отличных от единицы элементов $a\in Z(A)$ и $b\in Z(B)$, для которых группа $R=\langle [a,b^{-1}]^{\bar{a}}, \bar{a}\in A\rangle$ абелева. Очевидно, $N_G(R)\supset A$. Так как $a\neq 1$ и A не содержит отличных от единицы нормальных делителей группы G, то $C_G(a)\neq G$ и, следовательно, $|C_G(a):A|<\infty$. Так как группа G не является почти разрешимой, то $A\cdot R\neq G$ и потому $|A\cdot R:A|<\infty$. Отсюда легко вытекает, что группа $S=C_A(R)$ бесконечна. Пусть c — произвольный элемент из S. Тогда $c^{[a,b^{-1}]}=c$ и, значит, $c^{ba}=c^b$. Следовательно, $S^b\subset C_G(a)$. Поскольку $|C_G(a):A|<\infty$ и $|S|=\infty$, то $|S^b\cap A|=\infty$ и вместе с этим $|A^b\cap A|=\infty$. Но в таком случае $|Z(A^b)\cap Z(A)|=\infty$ и потому $Z(\langle A^b, A\rangle)\cap A\neq 1$. Отсюда следует, что $\langle A^b, A\rangle\neq G$, в силу чего $|\langle A^b, A\rangle:A|<\infty$, $|\langle A^b, A\rangle:A^b|<\infty$. Тогда подгруппа $\langle A^b, A\rangle$ конечна над своим центром и, значит, $\langle A^b, A\rangle=A$. Поэтому $A^b\supset A$ и, следовательно, $A^b=A$. Таким образом, неединичная подгруппа $\langle b\rangle\in Z(B)$ перестановочна с A. Последнее, однако, невозможно. Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы.

Следствие 1. *Если при условиях теоремы подгруппы A и B нильпотентны, то группа G разрешима.*

Следствие 1 вытекает из нашей теоремы и известной теоремы Кегеля — Виландта (см., например, [5, теорема VI.4.3, с. 674]).

С л е д с т в и е 2. *Всякая группа, факторизуемая двумя нильпотентными подгруппами, удовлетворяющими условию минимальности, является разрешимой экстремальной группой.*

Следствие 2 нетрудно доказать, пользуясь следствием 1, теоремой 4 работы [6] и теоремой 5.5 из [3]. Это следствие дает положительное решение задачи 2.69 из «Коуровской тетради» [7].

С л е д с т в и е 3. *Если при условиях теоремы подгруппы A и B периодическое, то группа G локально конечна.*

Следствие 3 вытекает из нашей теоремы и теоремы 5.4 работы [3].

П р и м е ч а н и е. Лемма, сформулированная в настоящей работе, может быть выведена как следствие из лемм 1 и 3 работы автора [8] (приведенных там с доказательствами).

ЛИТЕРАТУРА

1. I t o N. Über das Produkt von Zwei abelschen Gruppen.— Math. Z., 1955, **62**, N 4, S. 400—401.
2. Ч е р н и к о в С. Н. О дополняемости силовских П-подгрупп в некоторых классах групп.— Мат. сб., 1955, **37**, № 3, с. 557—566.
3. A m b e r g B. Artinian and Noetherian factorized groups.— Rend. d. Semin. Mat. d. Univ. di Padova, 1976, **55**, p. 105—122.
4. К у р о ш А. Г. Теория групп.— М.: Наука, 1967.— 648 с.
5. H u p p e r t B. Endliche Gruppen. I. Berlin — Heidelberg — New York, Springer—Verlag, 1967.— 793 S.
6. Ч е р н и к о в С. Н. О специальных *p*-группах.— Мат. сб., 1950, **27**, N 2, с. 185—200.
7. Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп.— Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1978.— 100 с.
8. Ч е р н и к о в Н. С. Бесконечные группы, факторизуемые нильпотентными подгруппами.— ДАН СССР, 1980, 252, № 1, с. 57—60.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
21.I 1980 г.