УДК 517.93

Л. М. Шемякина

К вопросу обоснования метода усреднения для одного типа дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

Как известно [1], обоснование метода усреднения предполагает разрешение двух основных проблем: отыскание условий, при которых разность между решениями точной и соответствующей ей усредненной систем для достаточно малых значений параметра ε становится сколь угодно малой на сколь угодно большом, но все же конечном интервале времени, а также установление соответствий между различными свойствами решений точных и усредненных уравнений на бесконечном интервале времени.

В настоящей работе рассматривается решение первой из этих проблем для уравнений вида

$$\dot{x}(t) = \varepsilon f(t, x(t), x(t^{\alpha})), \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый положительный параметр, t — время, $x(t)$ и $x(t^{\alpha})$ — n-мерные векторы, $f(t, x, y)$ — n-мерная вектор-функция, определенная для $x \in D$, $y \in D$, $t \in [0, \infty)$, D — некоторая область евклидова пространства E_n, $\alpha > 0$ — фиксированная постоянная. Функция $f(t, x, y)$ непрерывно дифференцируема по x, y и имеет интегральное среднее равномерно по x, y из области $D \times D$:

$$f_0(x, y) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x, y)\, ds. \tag{2}$$

Решением системы (1) будем считать функцию, удовлетворяющую системе при всех $t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon^\beta}\right]$.

Это решение $x(t) = x(t, \varepsilon)$ будем сравнивать с решением $\xi(t) = \xi(t, \varepsilon)$ усредненной системы

$$\dot{\xi}(t) = \varepsilon f_0(\xi(t), \xi(t^\alpha)), \tag{3}$$

предполагая, что

$$|x(0, \varepsilon) - \xi(0, \varepsilon)| < K\varepsilon^{\gamma_1} \tag{4}$$

для $t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon^\beta}\right]$, некоторого $\gamma_1 > 0$ и постоянного $K > 0$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть функция $f(t, x, y)$ определена в области $[0, \infty) \times \times D \times D$ и пусть в этой области*

1) *$f(t, x, y)$ непрерывно дифференцируема и ограничена вместе со своими производными для $t, x, y \in [0, \infty) \times D \times D$:*

$$|f(t, x, y)| < M; \quad \left|\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial x}\right| < M_0; \quad \left|\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial y}\right| < M_0; \tag{5}$$

$$\left|\int_0^t \frac{\partial f_1(\tau, x(t), x(t^\alpha))}{\partial x}\, d\tau\right| \leqslant Nt^\delta, \tag{6}$$

где δ — некоторая положительная постоянная;

2) *функция $f(t, x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по x, y:*

$$|f(t, \bar{x}, \bar{y}) - f(t, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})| \leqslant L\{|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| + |\bar{y} - \bar{\bar{y}}|\}; \tag{7}$$

3) *уравнение (1) и усредненное уравнение (3) имеют решения $x(t) = x(t, \varepsilon)$ и $\xi(t) = \xi(t, \varepsilon)$ для $t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon^\beta}\right]$, удовлетворяющие при $t = 0$ условие (4).*

Тогда для любого $\eta > 0$ можно указать такое ε_0, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ выполняется неравенство

$$|x(t, \varepsilon) - \xi(t, \varepsilon)| < \eta \tag{8}$$

для $t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon^\beta}\right]$, где

$$\beta \leqslant \min\left(1, \frac{2}{\alpha + \delta}\right). \tag{9}$$

Доказательство будем вести по схеме, предложенной в [2]. Пусть

$$f_1(t, x, y) = f(t, x, y) - f_0(x, y). \tag{10}$$

Для функции $f(t, x(t), x(t^\alpha))$ с учетом (1) справедливо тождественно по t равенство

$$\int_0^t f_1(t, x(t), x(t^\alpha))\, dt = \int_0^t f_1(\tau, x(t), x(t^\alpha))\, d\tau -$$

$$-\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_0^t \frac{\partial f_1(\tau, x(t), x(t^\alpha))}{\partial x}\, d\tau\cdot f(t, x(t), x(t^\alpha))\, dt - \tag{11}$$

$$-\varepsilon\alpha\int\limits_0^t\int\limits_0^t \frac{\partial f_1(\tau, x(t), x(t^\alpha))}{\partial y}\, d\tau\cdot f(t^\alpha, x(t^\alpha), x(t^{\alpha^2}))\, t^{\alpha-1} dt.$$

Используем полученное равенство для оценки разности между решениями системы (1) и усредненной системы (3). Имеем

$$x(t)-\xi(t) = x(0, \varepsilon) - \xi(0, \varepsilon) + \varepsilon\int\limits_0^t [f_0(x(t), x(t^\alpha)) + f_1(t, x(t), x(t^\alpha)) -$$

$$- f_0(\xi(t), \xi(t^\alpha))]\, dt = x(0, \varepsilon) - \xi(0, \varepsilon) + \varepsilon\int\limits_0^t [f_0(x(t), x(t^\alpha)) - f_0(\xi(t), \xi(t^\alpha))]dt +$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^t f_1(\tau, x(t), x(t^\alpha))\, d\tau - \varepsilon^2\int\limits_0^t\int\limits_0^t \frac{\partial f_1(\tau, x(t), x(t^\alpha))}{\partial x}\, d\tau\cdot f(t, x(t), x(t^\alpha))\, dt -$$

$$-\varepsilon^2\alpha\int\limits_0^t\int\limits_0^t \frac{\partial f_1(\tau, x(t), x(t^\alpha))}{\partial y}\, d\tau\cdot f(t^\alpha, x(t^\alpha), x(t^{\alpha^2}))\, t^{\alpha-1}\, dt. \tag{12}$$

Согласно [4], можно построить такую монотонно убывающую функцию $f(t)$, стремящуюся к нулю при $t\to\infty$, что во всей области D

$$\left|\int\limits_0^t f_1(\tau, x(t), x(t^\alpha))\, d\tau\right| \leqslant tf(t). \tag{13}$$

Принимая во внимание (5), (6), (13), а также неравенство

$$|f_0(x(t), x(t^\alpha)) - f_0(\xi(t), \xi(t^\alpha))| \leqslant L\{|x(t)-\xi(t)| + |x(t^\alpha) - \xi(t^\alpha)|\}, \tag{14}$$

для разности $x(t)-\xi(t)$ можно записать оценку

$$|x(t)-\xi(t)| \leqslant K\varepsilon^{\gamma_1} + \varepsilon L\int\limits_0^t \{|x(t)-\xi(t)| + |x(t^\alpha) - \xi(t^\alpha)|\}\, dt +$$

$$+\varepsilon\left|\int\limits_0^t f_1(\tau, x(t), x(t^\alpha))\, d\tau\right| + \varepsilon^2\left|\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^t f_1(\tau, x(t), x(t^\alpha))\, d\tau\cdot f(t, x(t),\right.$$

$$\left. x(t^\alpha))\, dt\right| + \varepsilon^2\alpha\left|\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^t f_1(\tau, x(t), x(t^\alpha))\, d\tau\cdot f(t^\alpha, x(t^\alpha), x(t^{\alpha^2}))\, t^{\alpha-1}\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant K\varepsilon^{\gamma_1} + \varepsilon L\int\limits_0^t \{|x(t)-\xi(t)| + |x(t^\alpha)-\xi(t^\alpha)|\}\, dt + \varepsilon tf(t) + \varepsilon^2 MNt^\delta +$$

$$+\varepsilon^2 Nt^\delta\int\limits_0^t |f(t^\alpha, x(t^\alpha), x(t^{\alpha^2}))|\, t^{\alpha-1}\, dt. \tag{15}$$

Поскольку $|f(t, x(t), x(t^\alpha))| < M$, $t\in\left[0, \dfrac{L}{\varepsilon^\beta}\right]$ и $x(t)$, $x(t^\alpha)$ и $x(t^{\alpha^2})$ ограничены, то справедлива оценка

$$|f(t^\alpha, x(t^\alpha), x(t^{\alpha^2}))| < M \tag{16}$$

и, следовательно, неравенство (15) для $t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon^{\beta}}\right]$ можно записать в виде

$$|x(t)-\xi(t)| \leqslant K\varepsilon^{\gamma_1} + \varepsilon L \int\limits_0^{\frac{L}{\varepsilon^{\beta}}} |x(t)-\xi(t)|\,dt + \varepsilon L \int\limits_0^{\frac{L}{\varepsilon^{\beta}}} |x(t^{\alpha})-\xi(t^{\alpha})|\,dt + \\ + \varepsilon t f(t) + \varepsilon^2 M N t^{\delta}(1+t^{\alpha}). \tag{17}$$

Сделав во втором слагаемом правой части (17) замену переменных $t^{\alpha} = \tau$, перепишем неравенство (17) в виде

$$|x(t)-\xi(t)| \leqslant K\varepsilon^{\gamma_1} + \varepsilon L \int\limits_0^{\frac{L}{\varepsilon^{\beta}}} |x(t)-\xi(t)|\,dt + \varepsilon^{\beta(\alpha-1)+1} \int\limits_0^{\frac{L^{\alpha}}{\varepsilon^{\alpha\beta}}} |x(\tau)-\xi(\tau)|\,d\tau + \\ + \varepsilon t f(t) + \varepsilon^2 M N t^{\delta}(1+t^{\alpha}). \tag{18}$$

Применяя к неравенству (18) обобщенную лемму Гронуолла—Беллмана [4], получаем

$$|x(t)-\xi(t)| \leqslant \left[K\varepsilon^{\gamma_1} + \varepsilon t f(t) + \varepsilon^2 (1+t^{\alpha}) t^{\delta} + \varepsilon \int\limits_0^{\frac{L}{\varepsilon^{\beta}}} |x(t)-\xi(t)|\,dt\right] \times \\ \times \exp L_0 \varepsilon^{1-\beta} = [K\varepsilon^{\gamma_1} + \varepsilon t f(t) + \varepsilon^2 t^{\delta}(1+t^{\alpha})] \exp L_0 \varepsilon^{1-\beta} + \\ + \varepsilon \exp L_0 \varepsilon^{1-\beta} \int\limits_0^{\frac{L}{\varepsilon^{\beta}}} |x(t)-\xi(t)|\,dt. \tag{19}$$

Повторное применение этой леммы к неравенству (19) приводит к оценке

$$|x(t)-\xi(t)| \leqslant [K\varepsilon^{\gamma_1} + \varepsilon t f(t) + \varepsilon^2 t^{\delta}(l+t^{\alpha})] \exp L_0 \varepsilon^{1-\beta} \exp\{L\varepsilon^{1-\beta} \exp L_0 \varepsilon^{1-\beta}\} = \\ = [K\varepsilon^{\gamma_1} + \varepsilon t f(t) + \varepsilon^2 t^{\delta}(1+t^{\alpha})] \exp\{\varepsilon^{1-\beta}(L_0 + \exp L\varepsilon^{1-\beta})\}. \tag{20}$$

С учетом интервала изменения t неравенство (20) принимает вид

$$|x(t)-\xi(t)| \leqslant \left[K\varepsilon^{\gamma_1} + \varepsilon^{1-\beta} f\left(\frac{L}{\varepsilon^{\beta}}\right) + L^{\delta}\varepsilon^{2-\beta\delta} + L^{\delta}\varepsilon^{2-\beta(\alpha+\delta)}\right] \times \\ \times \exp\{\varepsilon^{1-\beta}(L_0 + \exp L\varepsilon^{1-\beta}). \tag{21}$$

Из выбора постоянной β следует, что $1-\beta \geqslant 0$, $2-\beta\delta > 0$, $\alpha - \beta \times (\alpha+\delta) > 0$, где $\beta \leqslant \min\left(1, \frac{2}{\alpha+\delta}\right)$. Следовательно, $|x(t)-\xi(t)| < \eta(\varepsilon)$, где $\eta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to \varepsilon_0$.

З а м е ч а н и е 1. Если функция $f_1(t, x(t), x(t^{\alpha}))$ периодическая по t, то оценка (6) выполняется с $\delta = 0$.

З а м е ч а н и е 2. То же имеет место и для достаточно гладкой квазипериодической функции $f_1(t, x(t), x(t^{\alpha}))$ с сильно несоизмеримым частотным базисом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Физматгиз, 1963.— 410 с.
2. Самойленко А. М. Об одном случае непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра.— Укр. мат. журн., 1962, 14, № 3, с. 289—298.

3. С а н с о н е Д ж. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Изд-во иностр. лит., 1954.— Т. 2. 415 с.
4. Ф и л а т о в А. Н., Ш а р о в а Л. В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1976.— 152 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию 29.III 1978 г.;
после переработки — 30.I 1980 г.