УДК 513.881

Е. А. Павлов

К оператору Кальдерона

В теории интерполяции линейных операторов важен вопрос об описании условий, при которых тройка пространств (A, B, E_1) — интерполяционная относительно тройки (C, D, E_2), где E_1 и E_2 — пространства, промежуточные между A и B, C и D соответственно. В настоящей работе получены достаточные условия на симметричные пространства E_1 и E_2, при выполнении которых тройка $(\Lambda_{\varphi_0}, \Lambda_{\varphi_1}, E_1)$ — слабо интерполяционная относительно тройки $(M_{\psi_0}, M_{\psi_1}, E_2)$, где φ_i и ψ_i — положительные вогнутые функции. Полученные результаты являются дополнением к статье [1] и к результатам, полученным в [2].

Определение. Банахово пространство E измеримых на $[0, a)$ $(a \leqslant \infty)$ функций называется симметричным пространством [3], если оно удовлетворяет условиям:

1) если $x(t) \in E$ и $|y(t)| \leqslant |x(t)|$ почти всюду, где $y(t)$ — измерима, то $y(t) \in E$ и $\|y\|_E \leqslant \|x\|_E$;

2) если $x(t) \in E$ и $y(t)$ равноизмерима с $x(t)$, то $y(t) \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Оператор растяжения σ_t задается равенством $\sigma_t x(s) = x(s/t)$. Для положительной функции $\varphi(t)$ на полуоси через M_φ обозначается полумультипликативная функция $M_\varphi(t) = \sup\limits_{0<s<\infty} \dfrac{\varphi(t \cdot s)}{\varphi(s)}$. Показателями растяжения α_φ и β_φ называются числа [1] $\alpha_\varphi = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\log M_\varphi(t)}{\log t}$; $\beta_\varphi = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{\log M_\varphi(t)}{\log t}$. Через α_E и β_E обозначаются показатели растяжения (индексы пространства см. [4]) полумультипликативной функции $\|\sigma_t\|_E$. Оператор Кальдерона S задается равенством $Sx(t) = \int\limits_0^\infty x(s)\, d \min\limits_{i=0,1} \left\{\dfrac{\varphi_i(s)}{\psi_i(t)}\right\}$, где $\varphi_i(t)$ и $\psi_i(t)$ — вогнутые положительные функции.

Теорема. *Пусть симметричные пространства E_1, E_2 и функции $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$ $(i = 0, 1)$ удовлетворяют условиям:*

1) $\varphi_\theta(t)\, \psi_\theta^{-1}(t) \| \sigma_{\frac{1}{t}} \|_{E_1} \in E_2$, *где* $\theta \in (0, 1)$, $\varphi_\theta(t) = \varphi_0^\theta(t)\, \varphi_1(t)^{1-\theta}$; $\psi_\theta(t) = \psi_0^\theta(t)\, \psi_1^{1-\theta}(t)$;

2) $(M_\varphi)'_\theta(s) \in E_1^1$ *и* $(M_\varphi)_\theta(+0) = 0$, *где* $(M_\varphi)_\theta(s) = M_{\varphi_0}^\theta(s)\, M_{\varphi_1}^{1-\theta}(s)$ *и* E_1^1 — *двойственное к* E_1 *пространство* (*см.* [1]). *Тогда оператор Кальдерона S ограниченно действует из E_1 в E_2.*

Доказательство. Из неравенства $(Sx)^*(t) \leqslant (Sx^*)(t)$ [5], свойств перестановок измеримых функций и того факта, что оператор растяжения ограниченно действует в симметричном пространстве (см. [6]), получаем

$$(Sx)^*(t) \leqslant \int\limits_0^\infty x^*(\tau)\, d \min_{i=0,1} \frac{\varphi_i(\tau)}{\psi_i(\tau)} = \int\limits_0^\infty x^*(t \cdot s)\, d \min_{i=0,1} \frac{\varphi_i(t \cdot s)}{\varphi_i(t)} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty x^*(t\cdot s)\, d\min_{i=0,1} M_{\varphi_i}(s)\frac{\varphi_i(t)}{\psi_i(t)} \leqslant \frac{\varphi_\theta(t)}{\psi_\theta(t)}\int\limits_0^\infty x^*(t\cdot s)\, M'\varphi_\theta(s)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varphi_\theta(t)}{\psi_\theta(t)}\| x^*(t\cdot s)\|_{E_1}\| M'_{\varphi\theta}(s)\|_{E_1^1} \leqslant C\frac{\varphi_\theta(t)}{\psi_\theta(t)}\|\sigma_{\frac{1}{t}}\|_{E_1}\| x\|_{E_1},$$

где $C=\| M'_{\varphi\theta}(s)\|_{E_1^1}$.

Имеем неравенство $Sx(t)\leqslant C\frac{\varphi_\theta(t)}{\psi_\theta(t)}\|\sigma_{\frac{1}{t}}\|_{E_1}\| x\|_{E_1}$. Далее, получаем $\| Sx(t)\|_{E_2}\leqslant C\left\|\frac{\varphi_\theta(t)}{\psi_\theta(t)}\right\|\sigma_{\frac{1}{t}}\|_{E_1}\|_{E_2}\| x\|_{E_1}$. Из условия 1 теоремы следует, что S ограниченно действует из E_1 в E_2. Теорема доказана.

Следствие (интерполяционная теорема). *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда любой линейный оператор слабых типов* (φ_0, ψ_0) *и* (φ_1, ψ_1) *одновременно, ограниченно действугт из* E_1 *в* E_2.

Утверждение следствия вытекает из неравенства $(Tx)^*(t)\leqslant(Sx^*)$ [7] и теоремы 1.

Замечание. В интерполяционной теореме Крейна—Семенова для оператора T слабых типов (φ_i, ψ_i), $i=0$, 1, одновременно по промежуточному между Λ_{φ_0} и Λ_{φ_1} пространству E конструировалось новое пространство $E_{\delta,\chi}$ (см. [8]), такое, что $T: E\to E_{\delta,\chi}$. Условия в этой теореме налагались на индексы пространства E и показатели растяжения для функций φ_i.

В данном следствии описываются пары симметричных пространств E_1 и E_2, такие, что любой оператор T слабых типов (φ_i, ψ_i) одновременно ограниченно действует из E_1 в E_2. Между нормами E_1 и E_2 нет такой явной связи, как в теореме из работы [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн С. Г., Семенов Е. М. Интерполяция операторов ослабленного типа.— Функц. анализ и его прилож., 1973, 7, № 2, с. 89—90.
2. Павлов Е. А. Об операторе Кальдерона.— Analysis Mathematica, 1978, 4, № 2, с. 117—124.
3. Функциональный анализ С. М. Б./Под ред. Крейна С. Г.— М.: Наука, 1972.—544 с.
4. Boyd D. W. Indices of function spaces and their relationship to interpolation.— Canad J. Math., 1969, 21, N 5, p. 1245—1254.
5. Zippin M. Interpolation of operators of weak type between rearrangement invariant spaces.— J. Funct. Anal., 1971, 7. N 2, p. 267—284.
6. Shimogaki T. Hardy—Jittlwood majorants in functions spaces.— J. Math. Soc. Japan, 1965, 17, N 4, p. 365—375.
7. Sharpley R. Spaces $\Lambda_\alpha(X)$ and interpolation.— J. Funet. Anal, 1972, 11, N 4, p. 479—513.
8. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов.— М. :Наука, 1978.—400 с.

Рубежанский филиал
Ворошиловградского
машиностроительного института

Поступила в редакцию 26.VI 1979 г.;
после переработки 18.III 1980 г.