УДК 517.518.83

В. Ф. Бабенко, С. А. Пичугов

О приближении в среднем линейных комбинаций сдвигов некоторых функций

В настоящей заметке мы, используя известную теоретико-числовую теорему Кронекера, докажем одно утверждение (теорема 1), полезное при изучении асимптотических свойств наилучшего (теорема 2) и наилучшего одностороннего (теорема 3) приближения в среднем индивидуальных функций. Наши результаты примыкают к результатам работы [1] (см. также [2, с. 450 — 457]): для произвольного набора $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ различных точек из $[0, 2\pi)$ и действительных чисел $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, таких, что $0<\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|<\infty$, имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{E_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}c_k f(x-x_k)\right)}{\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|E_n(f)}=1, \tag{1}$$

где $f(x)=D_r(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\cos(kx-2^{-1}\pi r)$, $r=1, 2, \ldots$ — функция Бернулли, а $E_n(f)$ — наилучшее приближение в среднем на периоде функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1$.

Формулировке теоремы 1 предпошлем следующие обозначения. Пусть f, φ — периодические функции, хотя бы одна из которых в среднем на $[0, 2\pi)$ равна нулю, причем $f\in L_p(0, 2\pi)$, $\varphi\in L_q(0, 2\pi)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty,\ p^{-1}+q^{-1}=1)$; $\varphi_n(x)=\varphi(nx)$, $n=1, 2, \ldots$; $f*\varphi_n$ — свертка функций f и φ_n, т. е. $f*\varphi_n(x)=\int_0^{2\pi}f(x-t)\varphi_n(t)\,dt$; $\gamma_{n,1}$ и $\gamma_{n,2}$ — ближайшие точки из $[0, 2\pi)$ такие, что $f*\varphi_n(\gamma_{n,1})=\max_{\gamma}f*\varphi_n(\gamma)$ и $f*\varphi_n(\gamma_{n,2})=\min_{\gamma}f*\varphi_n(\gamma)$, причем $\gamma_{n,2}>\gamma_{n,1}$. Этих обозначений без дополнительных оговорок и будем придерживаться ниже.

Теорема 1. *Пусть* 1. f *и* φ *таковы, что* а) $n|\gamma_{n,1}-\gamma_{n,2}|=\theta=\mathrm{const}$; б) *существует число* C *такое, что при достаточно малом* ε *для любого* $x\in\left(\gamma_{n,i}-\frac{\varepsilon}{n},\ \gamma_{n,i}+\frac{\varepsilon}{n}\right)$ *и любого достаточно большого* n $|f*\varphi_n(\gamma_{n,i})-f*\varphi_n(x)|<C|f*\varphi_n(\gamma_{n,i})|\cdot|x-\gamma_{n,i}|n$, $i=1, 2$.

2. $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *набор различных чисел из* $[0, 2\pi)$ *таких, что для любого* m *числа* $2\pi, x_1, \ldots, x_m$ *линейно независимы над кольцом целых чисел.*

3. $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *набор действительных чисел таких, что* $0<\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|<\infty$.

Тогда

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\max\limits_{\gamma}\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k f*\varphi_n(\gamma+x_k)}{\sum\limits_{k:c_k>0}c_k\max\limits_{\gamma}f*\varphi_n(\gamma)+\sum\limits_{k:c_k<0}c_k\min\limits_{\gamma}f*\varphi_n(\gamma)}=1. \tag{2}$$

Доказательство. Левая часть (2) не превосходит единицы, так как

$$\max_{\gamma}\sum_{k=1}^{\infty}c_k f*\varphi_n(\gamma+x_k)\leqslant\sum_{k:c_k>0}c_k\max_{\gamma}f*\varphi_n(\gamma)+\sum_{k:c_k<0}c_k\min_{\gamma}f*\varphi_n(\gamma).$$

Неравенство противоположного смысла докажем сначала для $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ таких, что $c_k=0$, начиная с некоторого номера $k=m+1$. Ввиду условия 2 по теореме Кронекера (см., на пример, [3, с. 123]) для любых наперед заданных N и $\varepsilon>0$ существуют целые $l_1,\ldots,l_m$, n_0 $(n_0>N)$ такие, что

$$\left|x_k-\frac{2\pi l_k}{n_0}-\frac{\alpha_k}{n_0}\right|<\frac{\varepsilon}{n_0},\quad k=1,\ldots,m, \tag{3}$$

где $\alpha_k=2^{-1}(1-\operatorname{sign}c_k)\,\theta$.

Очевидно, что $\max\limits_{\gamma}\sum\limits_{k=1}^{m}c_k f*\varphi_{n_0}(\gamma+x_k)\geqslant\sum\limits_{k=1}^{m}c_k f*\varphi_{n_0}\left(\gamma_{n_0,1}+\frac{2\pi l_k}{n_0}+\right.$

$$\left.+\frac{\alpha_k}{n_0}\right)-\left|\sum_{k=1}^{m}c_k\left[f*\varphi_{n_0}\left(\gamma_{n_0,1}+\frac{2\pi l_k}{n_0}+\frac{\alpha_k}{n_0}\right)-f*\varphi_{n_0}(\gamma_{n_0,1}+x_k)\right]\right|=A_1-A_2.$$

Далее, в силу определения α_k, $\gamma_{n,i}$, θ

$$A_1=\sum_{k:c_k>0}c_k f*\varphi_{n_0}\left(\gamma_{n_0,1}+\frac{2\pi l_k}{n_0}\right)+\sum_{k:c_k<0}c_k f*\varphi_{n_0}\left(\gamma_{n_0,1}+\frac{2\pi l_k}{n_0}+\frac{\theta}{n_0}\right)=$$

$$=\sum_{k:c_k>0}c_k f*\varphi_{n_0}(\gamma_{n_0,1})+\sum_{k:c_k<0}c_k f*\varphi_{n_0}(\gamma_{n_0,2}).$$

Ввиду (3) и условия 1, б теоремы

$$A_2\leqslant\sum_{k=1}^{m}|c_k|\left|f*\varphi_{n_0}\left(\gamma_{n_0 1}+\frac{2\pi l_k}{n_0}+\frac{\alpha_k}{n_0}\right)-f*\varphi_{n_0}(\gamma_{n_0,1}+x_k)\right|\leqslant C\sum_{k:c_k>0}c_k\varepsilon\,|f*\varphi_{n_0}\times$$

$$\times(\gamma_{n_0,1})|+C\sum_{k:c_k<0}|c_k|\,\varepsilon\,|f*\varphi_{n_0}(\gamma_{n_0,2})|=C\varepsilon\left(\sum_{k:c_k>0}c_k\max_{\gamma}f*\varphi_{n_0}(\gamma)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k:c_k<0}c_k\min_{\gamma}f*\varphi_{n_0}(\gamma)\right).$$

Таким образом, $\forall m,\varepsilon>0$ $\exists n_0>N$ такое, что

$$\frac{\max\limits_{\gamma}\sum\limits_{k=1}^{m}c_k f*\varphi_{n_0}(\gamma+x_k)}{\sum\limits_{k:c_k>0}c_k\max\limits_{\gamma}f*\varphi_{n_0}(\gamma)+\sum\limits_{k:c_k<0}c_k\min\limits_{\gamma}f*\varphi_{n_0}(\gamma)}\geqslant 1-C\varepsilon, \tag{4}$$

и соотношение (2) для наборов $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, у которых $c_k = 0$, начиная с некоторого номера, доказано.

В общем случае по заданному $\varepsilon > 0$ выберем m так, чтобы

$$\sum_{\substack{k>m\\ c_k>0}} c_k < \varepsilon \sum_{k:c_k>0} c_k, \quad \sum_{\substack{k>m\\ c_k<0}} c_k > \varepsilon \sum_{k:c_k<0} c_k, \quad \sum_{\substack{k>m\\ c_k<0}} (-c_k) < \varepsilon \sum_{k:c_k>0} c_k,$$

$$\sum_{\substack{k>m\\ c_k>0}} (-c_k) > \varepsilon \sum_{k:c_k<0} c_k.$$

Рассмотрим разность

$$\Delta = \left| \frac{\max\limits_{\gamma} \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k f*\varphi_n(\gamma + x_k)}{\sum\limits_{k:c_k>0} c_k \max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma) + \sum\limits_{k:c_k<0} c_k \min\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\max\limits_{\gamma} \sum\limits_{k=1}^{m} c_k f*\varphi_n(\gamma + x_k)}{\sum\limits_{\substack{k\leqslant m\\ c_k>0}} c_k \max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma) + \sum\limits_{\substack{k\leqslant m\\ c_k<0}} c_k \min\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{\max\limits_{\gamma} \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k f*\varphi_n(\gamma + x_k)}{\sum\limits_{k:c_k>0} c_k \max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma) + \sum\limits_{k:c_k<0} c_k \min\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\max \sum\limits_{k=1}^{m} c_k f*\varphi_n(\gamma + x_k)}{\sum\limits_{k:c_k>0} c_k \max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma) + \sum\limits_{k:c_k<0} c_k \min\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)} \right| +$$

$$+ \left| \frac{\max\limits_{\gamma} \sum\limits_{k=1}^{m} c_k f*\varphi_n(\gamma + x_k)}{\sum\limits_{k:c_k>0} c_k \max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma) + \sum\limits_{k:c_k<0} c_k \min\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\max\limits_{\gamma} \sum\limits_{k=1}^{m} c_k f*\varphi_n(\gamma + x_k)}{\sum\limits_{\substack{k\leqslant m\\ c_k>0}} c_k \max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma) + \sum\limits_{\substack{k\leqslant m\\ c_k<0}} c_k \min\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)} \right| = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Оценим сначала Δ_2. Так как $\max\limits_{\gamma} \sum\limits_{k} c_k f*\varphi_n(\gamma + x_k) \leqslant \sum\limits_{k:c_k>0} c_k \max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma) +$ $+ \sum\limits_{k:c_k<0} c_k \min\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)$, то

$$\Delta_2=\frac{\left(\max\limits_{\gamma}\sum\limits_{k=1}^{m} c_k f*\varphi_n(\gamma+x_k)\right)\left(\sum\limits_{\substack{k>m\\c_k>0}} c_k \max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)+\sum\limits_{\substack{k>m\\c_k<0}} c_k \min f*\varphi_n(\gamma)\right)}{\left(\sum\limits_{\substack{k\leqslant m\\c_k>0}} c_k \max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)+\sum\limits_{\substack{k\leqslant m\\c_k<0}} c_k \min\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)\right)\left(\sum\limits_{k:c_k>0} c_k \max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)+\sum\limits_{k:c_k<0} c_k \min\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sum\limits_{\substack{k>m\\c_k>0}} c_k \max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)+\sum\limits_{\substack{k>m\\c_k<0}} c_k \min\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)}{\sum\limits_{k:c_k>0} c_k \max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)+\sum\limits_{k:c_k<0} c_k \min f*\varphi_n(\gamma)}.$$

Поскольку $\max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)>0$ и $\min\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)<0$, в силу выбора m имеем

$$\Delta_2\leqslant\frac{\max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)\,\varepsilon\sum\limits_{k:c_k>0} c_k+\min\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)\,\varepsilon\sum\limits_{k:c_k<0} c_k}{\max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)\sum\limits_{k:c_k>0} c_k+\min\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)\sum\limits_{k:c_k<0} c_k}=\varepsilon.$$

Так как $\max f(x)-\max g(x)\leqslant\max(f(x)-g(x))$, то при

$$\max_{\gamma}\sum_{k=1}^{\infty} c_k f*\varphi_n(\gamma+x_k)>\max_{\gamma}\sum_{k=1}^{m} c_k f*\varphi_n(\gamma+x_k)$$

в силу выбора m

$$\Delta_1\leqslant\frac{\max\limits_{\gamma}\sum\limits_{k>m} c_k f*\varphi_n(\gamma+x_k)}{\sum\limits_{k:c_k>0} c_k \max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)+\sum\limits_{k:c_k<0} c_k \min\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sum\limits_{\substack{k>m\\c_k>0}} c_k \max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)+\sum\limits_{\substack{k>m\\c_k<0}} c_k \min\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)}{\sum\limits_{k:c_k>0} c_k \max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)+\sum\limits_{k:c_k<0} c_k \min\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)\,\varepsilon\sum\limits_{k:c_k>0} c_k+\min\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)\,\varepsilon\sum\limits_{k:c_k<0} c_k}{\max f*\varphi_n(\gamma)\sum\limits_{k:c_k>0} c_k+\min\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)\sum\limits_{k:c_k<0} c_k}=\varepsilon.$$

Если же $\max\limits_{\gamma}\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k f*\varphi_n(\gamma+x_k)<\max\limits_{\gamma}\sum\limits_{k=1}^{m} c_k f*\varphi_n(\gamma+x_k)$, то аналогично

$$\Delta_1\leqslant\frac{\max\limits_{\gamma}\left(-\sum\limits_{k>m} c_k f*\varphi_n(\gamma+x_k)\right)}{\sum\limits_{k:c_k>0} c_k \max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)+\sum\limits_{k:c_k<0} c_k \min\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{\max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma) \sum\limits_{\substack{k>m\\ c_k<0}} (-c_k) + \min\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma) \sum\limits_{\substack{k>m\\ c_k>0}} (-c_k)}{\max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma) \sum\limits_{k:c_k>0} c_k + \min\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma) \sum\limits_{k;c_k<0} c_k}$$

и в силу выбора m

$$\Delta_1 \leqslant \frac{\max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)\, \varepsilon \sum\limits_{k:c_k>0} c_k + \min\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)\, \varepsilon \sum\limits_{k:c_k<0} c_k}{\max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma) \sum\limits_{k:c_k>0} c_k + \min\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma) \sum\limits_{k:c_k<0} c_k} = \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется m такое, что при любом n

$$\frac{\max\limits_{\gamma} \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k f*\varphi_n(\gamma + x_k)}{\sum\limits_{k:c_k>0} c_k \max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma) + \sum\limits_{k:c_k<0} c_k \min\limits_{\gamma} f*\varphi_k(\gamma)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\max\limits_{\gamma} \sum\limits_{k=1}^{m} c_k f*\varphi_n(\gamma + x_k)}{\sum\limits_{\substack{k\leqslant m\\ c_k>0}} c_k \max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma) + \sum\limits_{\substack{k\leqslant m\\ c_k<0}} c_k \min\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)} - 2\varepsilon. \qquad (5)$$

Ввиду (4) и (5) левая часть (2) не меньше 1. Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Условиям 1 теоремы удовлетворяют, например, $f(x) = D_r(x)$ и $\varphi(x) = \operatorname{sign}\sin x$, а также ряд других функций.

Замечание 2. Существуют $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, f, φ ($\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ не удовлетворяет условию 2 теоремы, а $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, f, φ удовлетворяют условиям теоремы) такие, что (2) не выполняется.

В самом деле, положим $x_1 = 2^{-1}\pi$, $x_2 = 2^{-1}\cdot 3\cdot\pi$; x_k $(k>2)$ — произвольные числа из $[0, 2\pi)$; $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_k = 0$ $(k>2)$; $f(x) = D_1(2x) + D_2(x)\, \varphi(x) = \operatorname{sign}\sin 2x$. Тогда при $n\to\infty$

$$\frac{\max\limits_{\gamma} \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k f*\varphi_n(\gamma + x_k)}{\sum\limits_{k:c_k>0} c_k \max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma) + \sum\limits_{k;c_k<0} c_k \min\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)} =$$

$$\frac{\max\limits_{\gamma} \int\limits_0^{2\pi} \left[D_2\left(x-\gamma-\frac{\pi}{2}\right) - D_2\left(x-\gamma-\frac{3\pi}{2}\right)\right] \varphi_n(x)\,dx}{2\max\limits_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma)} \to 0,$$

так как числитель не превосходит $2E_{2n}(D_2)$, а знаменатель асимптотически (при $n\to\infty$) ведет себя, как $2E_n(D_1(2t))$.

Теорема 2. *Пусть $f\in L(0, 2\pi)$ такова, что для любого натурального n*

$$E_n(f) = \max_{\gamma} f*\varphi_n(\gamma), \qquad (6)$$

где $\varphi_n(x) = \operatorname{sign}\sin nx$. *Если для* f, φ_n, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ *выполнены условия теоремы* 1, *то*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{E_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k f(x-x_k)\right)}{\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\, E_n(f)} = 1. \tag{7}$$

Доказательство. Очевидно, что левая часть (7) не превосходит единицы. В силу теоремы двойственности С. М. Никольского [4] и условия (6)

$$\frac{E_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k f(x-x_k)\right)}{\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\, E_n(f)} \geqslant \frac{\max_{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} c_k f*\varphi_n(\gamma+x_k)}{\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \max f*\varphi_n(\gamma)}. \tag{8}$$

Из соотношения (8) и теоремы 1 следует (7).

Замечание 1. Условию (6) удовлетворяют, как хорошо известно, функции $f(x) = D_r(x)$, $r = 1, 2, \ldots$.

Замечание 2. Для $f(x) = D_r(x)$ утверждение теоремы 2 слабее соотношения (1). Однако теорема 2 справедлива в более общей ситуации.

Обозначим через $\hat{E}_n(f)$ (соответственно $\hat{\hat{E}}_n(f)$) наилучшее приближение в среднем на $[0, 2\pi)$ ограниченной 2π-периодической функции f тригонометрическими полиномами порядка $\leqslant n-1$, которые не больше (соответственно не меньше) f. $\hat{E}_n(f)$ (соответственно $\hat{\hat{E}}_n(f)$) называется наилучшим приближением снизу (соответственно сверху) функции f. Их общее название — односторонние приближения.

Пусть f — локально абсолютно непрерывная 2π-периодическая функция, $\varphi(x) = -D_1(x)$, T — полином наилучшего приближения снизу для f. Тогда

$$\hat{E}_n(f) = \int_0^{2\pi} (f(x) - T(x))\, dx = \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(x+\frac{2k\pi}{n}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{n} T\left(x+\frac{2k\pi}{n}\right)\right) dx \geqslant \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(x+\frac{2k\pi}{n}\right) - \min_{\gamma}\sum_{k=1}^{n} f\left(\gamma + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) dx = \int_0^{2\pi} f(x)\, dx - \frac{2\pi}{n}\min_{\gamma}\left[\frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{n} D_1\left(\gamma + \frac{2k\pi}{n} - x\right) f'(x)\, dx\right] =$$

$$= -\frac{2}{n}\min_{\gamma}\int_0^{2\pi} D_1(n(\gamma - x))\, f'(x)\, dx = \frac{2}{n}\max_{\gamma} f'*\varphi_n(\gamma).$$

Так что

$$\hat{E}_n(f) \geqslant \frac{2}{n}\max_{\gamma} f'*\varphi_n(\gamma). \tag{9}$$

Аналогично

$$\hat{\hat{E}}_n(f) \geqslant -\frac{2}{n} \min_{\gamma} f' * \varphi_n(\gamma). \tag{10}$$

Для некоторых функций f, например для $f(x) = D_r(x)$, $r > 1$, будет ([5, с. 386, 387], [6]):

$$\hat{E}_n(f) = \frac{2}{n} \max_{\gamma} f' * \varphi_n(\gamma), \tag{11}$$

$$\hat{\hat{E}}_n(f) = -\frac{2}{n} \min_{\gamma} f' * \varphi_n(\gamma). \tag{12}$$

Имеет место такая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1, $f(x)$ *и* $\varphi(x) = -D_1(x)$ *таковы, что* f' *и* φ *удовлетворяют условиям теоремы* 1 *и, кроме того, условиям* (11) *и* (12). *Тогда*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\hat{E}_n\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k f(x - x_k)\right)}{\hat{E}_n(f) \sum\limits_{k: c_k > 0} c_k - \hat{\hat{E}}_n(f) \sum\limits_{k: c_k < 0} c_k} = 1. \tag{13}$$

Доказательство. Легко видеть, что левая часть (13) не превосходит 1. В силу соотношения (9) и условий (11) и (12) теоремы

$$\frac{\hat{E}_n\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k f(x - x_k)\right)}{\hat{E}_n(f) \sum\limits_{k: c_k > 0} c_k - \hat{\hat{E}}_n(f) \sum\limits_{k: c_k < 0} c_k} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\frac{2}{n} \max\limits_{\gamma} \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k f' * \varphi_n(\gamma + x_n)}{\frac{2}{n} \sum\limits_{k: c_k > 0} c_k \max f' * \varphi_n(\gamma) + \frac{2}{n} \sum\limits_{k: c_k < 0} c_k \min f' * \varphi_n(\gamma)}.$$

Сопоставляя это неравенство с утверждением теоремы 1, завершаем доказательство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дзядык В. К. О наилучшем приближении в среднем периодических функций с особенностями.— Докл. АН СССР, 1951, 77, № 6, с. 949—952.
2. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного.— М.: Физматгиз, 1960.— 624 с.
3. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел.— М.: Мир, 1974.— 188 с.
4. Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1946, 10, № 3, с. 207—256.
5. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации.— М.: Наука, 1965.— 407 с.
6. Ganelius T. On one sided approximation by trigonometrical polynomials.— Math. Scand., 1956, 4, N 2, p. 247—256.

Днепропетровский
государственный университет

Поступила в редакцию 12.VI 1979 г.
после переработки — 28.VIII 1980 г.