УДК 517.917

И. А. Павлюк, Ю. А. Пасенченко

Вычисление мультипликаторов линейных периодических систем второго порядка

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений

$$y'' + \lambda^2 Q(t)\, y = P(t)\, y + \frac{1}{\lambda} R(t)\, y', \quad \lambda \geqslant \lambda_0 > 0, \tag{1}$$

с ω-периодическими коэффициентами. Матрицы $P(t) = [p_{js}(t)]_{j,s=1}^{n}$, $R(t) =$

$= [r_{js}(t)]_{j,s=1}^{n}$ и диагональная матрица $Q(t)$ удовлетворяют условиям

$$P(t),\ R(t) \in C^1[0, \omega],\ Q(t) \in C^3[0, \omega],\ Q(t) = [q_j(t)]_{j=1}^{n},$$

$$q_j(t) \geqslant q_0 > 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Для мультипликаторов системы (1) выводятся асимптотические формулы, позволяющие исследовать при больших λ устойчивость периодических решений линейных и нелинейных систем вида

$$y'' + \lambda^2 Q(t)\, y = f\left(t, y, \frac{1}{\lambda} y'\right), \quad \lambda \geqslant \lambda_0 > 0. \tag{3}$$

1. Приведем вспомогательный результат, относящийся к асимптотике интеграла

$$I(\lambda) = \int_0^{\omega} r(t) \exp\left\{ i\lambda \int_0^t g(\tau)\, d\tau \right\} dt, \quad \lambda \to \infty \tag{4}$$

с вещественными r, g, λ и знакопеременной функцией $g(t)$.

Лемма 1. *Пусть*: а) $r(t)$, $g(t) \in C^1[0, \omega]$, б) $g(0) = 0$, $g(t) > 0$ *при* $t \in (0, \omega]$; в) *существует правая* Δ*-окрестность точки* $t = 0$ *такая, что в ней* $g'(t) \geqslant 0$. *Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$I(\lambda) = O(\varepsilon(\lambda^{-1})), \quad \lambda \to \infty, \tag{5}$$

где $\varepsilon(\lambda^{-1})$ — *единственное решение уравнения*

$$\varepsilon g(\varepsilon) = \lambda^{-1} \tag{6}$$

и $\varepsilon(\lambda^{-1}) \to 0$ *при* $\lambda \to \infty$.

Доказательство. Фиксируем Δ-окрестность точки $t = 0$, в которой $g'(t) \geqslant 0$. Выберем $\varepsilon \in (0, \Delta)$ и представим $I(\lambda)$ в виде суммы интегралов

$$I(\lambda) = \int_0^{\varepsilon} \ldots + \int_{\varepsilon}^{\Delta} \ldots + \int_{\Delta}^{\omega} \ldots = I_1(\lambda, \varepsilon) + I_2(\lambda, \varepsilon) + I_3(\lambda). \tag{7}$$

На $[\Delta, \omega]$ выполняется $g(t) > 0$ и, следовательно, справедлива оценка $I_3(\lambda) = O(\lambda^{-1})$, $\lambda \to \infty$. Для $I_1(\lambda, \varepsilon)$ равномерно по λ справедлива оценка $I_1(\lambda, \varepsilon) = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$. Интегрируя по частям $I_2(\lambda, \varepsilon)$ и учитывая условия леммы, получаем

$$I_2(\lambda, \varepsilon) = \frac{O(1)}{\lambda g(\varepsilon)}, \quad \lambda \to \infty. \tag{8}$$

Объединяя оценки для I_1, I_2, I_3, получаем

$$I(\lambda) = O(\varepsilon) + \frac{O(1)}{\lambda g(\varepsilon)} + O(\lambda^{-1}), \quad \lambda \to \infty, \quad \varepsilon \to 0. \tag{9}$$

Пусть ε — корень уравнения (6). При больших λ $\varepsilon(\lambda^{-1})$ — единственное решение (6) и $\varepsilon(\lambda^{-1}) \to 0$ при $\lambda \to \infty$. В итоге приходим к оценке (5). Лемма доказана.

Примечание. Случай, когда $g(t)$ имеет на $[0, \omega]$ конечное число нулей, сводится к изученному выше с помощью разбиения $[0, \omega]$ на конечное число отрезков, удовлетворяющих условиям леммы 1.

2. От системы (1) заменой $h = \lambda^{-1} y'$ перейдем к эквивалентной системе $2n$ уравнений первого порядка

$$x' + A(t, \lambda)\, x = \frac{1}{\lambda} B(t)\, x, \tag{10}$$

$$x=\begin{bmatrix} y \\ h \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} 0 & -\lambda E_n \\ \lambda Q+\frac{1}{\lambda}\eta & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ P+\eta & R \end{bmatrix},$$

где $\eta(t)$ — дифференциальный инвариант матрицы $Q(t)$ [2], $\eta=\frac{1}{4}Q''Q^{-1}-$ $-\frac{5}{16}[Q'Q^{-1}]^2$.

Известно, что мультипликаторы системы (1) — собственные числа матрицы монодромии $X(t_0+\omega, t_0, \lambda)$ системы (10), где $X(t, t_0, \lambda)$ — нормальная интегральная матрица системы (10) ($X(t_0, t_0, \lambda)=E_{2n}$).

Интегральное уравнение для матрицы $X(t, t_0, \lambda)$ легко найти методом вариации, используя нормальную фундаментальную систему решений $V(t, t_0, \lambda)$ однородной системы $x'+A(t, \lambda)x=0$:

$$X(t, t_0, \lambda)=V(t, t_0, \lambda)\left[E_{2n}+\frac{1}{\lambda}\int_{t_0}^{t} V^{-1}(\tau, t_0, \lambda)B(\tau)X(\tau, t_0, \lambda)\,d\tau\right]. \quad (11)$$

Элеме нты матрицы $V(t, t_0, \lambda)$ выписываются в явном виде [2] $V(t, t_0, \lambda)=$ $=U(t, \lambda)U^{-1}(t_0, \lambda)$ через элементы матрицы $U(t, \lambda)$:

$$U=\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ \lambda^{-1}Y_1' & \lambda^{-1}Y_2' \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} Y_1(t, \lambda)&=Q^{-1/4}(t)\cos\lambda\int_{t_0}^{t} Q^{1/2}(\tau)\,d\tau, \\ Y_2(t, \lambda)&=Q^{-1/4}(t)\sin\lambda\int_{t_0}^{t} Q^{1/2}(\tau)\,d\tau. \end{aligned}$$

Итегрируя (11) один раз, получаем матрицу монодромии $X(t_0+\omega, t, \lambda)$ с точностью до $O(\lambda^{-2})$:

$$X(t_0+\omega, t_0, \lambda)=V(t_0+\omega, t_0, \lambda)\Bigg[E_{2n}+$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_{t_0}^{t_0+\omega} V^{-1}(\tau, t_0, \lambda)B(\tau)V(\tau, t_0, \lambda)\,d\tau\Bigg]+O(\lambda^{-2}), \quad \lambda\to\infty. \quad (12)$$

Обозначим $a_j(\lambda)=\cos\theta_j\left(1+\frac{\beta_j}{2\lambda}\right)+\frac{\alpha_j\sin\theta_j}{2\lambda}$, $b_j(\lambda)=\sin\theta_j\left(1+\frac{\beta_j}{2\lambda}\right)-$ $-\frac{\alpha_j\cos\theta_j}{2\lambda}$, $j=\overline{1, n}$, где $\theta_j=\lambda k_j$, $k_j=\int_0^{\omega} q_j^{1/2}(t)\,dt$, $\beta_j=\int_0^{\omega} r_{jj}(t)\,dt$, $\alpha_j=\int_0^{\omega} q_j^{-1/2}(t)\{p_{jj}(t)+\eta_j(t)\}\,dt$, $N_j=q_j^{-1/4}(t_0)[q_j^{-1/4}(t_0)]'$.

Подобие матриц будем обозначать символом $\backsim$. Введем диагональные матрицы $M_1=[a_i(\lambda)]_{j=1}^{n}$, $M_2=[b_j(\lambda)]_{j=1}^{n}$, $N=[N_j]_{j=1}^{n}$, $T=\sin\lambda\int_0^{\omega} Q^{1/2}(t)\,dt$.

Теорема 1. *Пусть в системе* (10), *удовлетворяющей условиям* (2), *матрица* $Q(t)$ *удовлетворяет условиям:* а) *при всех* $j\neq s$ *функции* $q_j(t)-$ $-q_s(t)$ *обращаются в нуль в конечном числе точек* $\{t_m\}$ *отрезка* $[0, \omega]$; б) *существуют правые и левые окрестности нулей функций* $q_j(t)-q_s(t)$, *в которых* $[q_j(t)-q_s(t)]'$ *не меняет знака. Тогда:* а) *для матрицы моно-*

дромии системы (10) *справедлива асимптотическая формула*

$$X(t_0+\omega, t_0, \lambda) \sim \begin{bmatrix} M_1 + iM_2 & 0 \\ 0 & M_1 - iM_2 \end{bmatrix} + O(\lambda^{-1}\varepsilon(\lambda^{-1})), \quad \lambda \to \infty, \tag{13}$$

где $\varepsilon(\lambda^{-1})$ — *решения уравнений* $\varepsilon\,|q_j(t_m \pm \varepsilon) - q_s(t_m \pm \varepsilon)| = \lambda^{-1}$, $j \neq s$, *и* $\varepsilon(\lambda^{-1}) \to 0$ *при* $\lambda \to \infty$; б) *для мультипликаторов* $\mu_{1,2}^{(j)}$ *системы* (10) *справедливы асимптотические формулы*

$$\mu_{1,2}^{(j)} = a_j(\lambda) \pm ib_j(\lambda) + O(\lambda^{-1}\varepsilon(\lambda^{-1})), \quad \lambda \to \infty, \quad j = \overline{1, n}; \tag{14}$$

в) *решения системы* (10) *асимптотически устойчивы при больших* λ, *если все* $\beta_j < 0$, *и неустойчивы, если хоть одно* $\beta_j > 0$.

Доказательство. Применяя лемму 1 к интегралу в формуле (12), приходим к соотношению

$$X(t_0+\omega, t_0, \lambda) \sim \overline{Y}(t_0+\omega, t_0, \lambda) + O(\lambda^{-1}\varepsilon(\lambda^{-1})), \quad \lambda \to \infty, \tag{15}$$

$$\overline{Y} = \begin{bmatrix} M_1 - \lambda^{-1}NT & M_2 \\ -M_2 & M_1 + \lambda^{-1}NT \end{bmatrix}.$$

Преобразование подобия с матрицей

$$\begin{bmatrix} E_n & iE_n \\ iE_n & E_n \end{bmatrix}$$

приводит (15) к виду

$$X(t_0+\omega, t_0, \lambda) \sim \widetilde{Y}(t_0+\omega, t_0, \lambda) + O(\lambda^{-1}\varepsilon(\lambda^{-1})), \quad \lambda \to \infty, \tag{16}$$

$$\widetilde{Y} = \begin{bmatrix} M_1 + iM_2 & -i\lambda^{-1}NT \\ i\lambda^{-1}NT & M_1 - iM_2 \end{bmatrix}.$$

Пусть λ таково, что выполнены неравенства

$$|\sin\theta_j| > \frac{\delta}{\lambda}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{17}$$

где δ выберем из условия

$$\delta > \max_j \left(|N_j| + \frac{1}{2}|\alpha_j| \right) \Big/ \left| 1 + \frac{1}{2\lambda}\beta_j \right|, \quad \lambda \geqslant \lambda_0 > 0. \tag{18}$$

Приведем $\widetilde{Y}$ к жордановой форме. Для $\rho_{1,2}^{(j)}$-собственных чисел $\widetilde{Y}$ получаем выражения $\rho_{1,2}^{(j)} = a_j(\lambda) \pm i\{b_j^2(\lambda) - \lambda^{-2}N_j^2\sin^2\theta_j\}^{1/2}$, $j = \overline{1, n}$.

В силу условий (17), (18) справедлива оценка

$$NTM_2^{-1} = O(1), \quad \lambda \to \infty, \tag{19}$$

из которой вытекает, что

$$\rho_{1,2}^{(j)} = a_j(\lambda) \pm ib_j(\lambda) + O(\lambda^{-2}), \quad \lambda \to \infty, \quad j = \overline{1, n}. \tag{20}$$

Из (19), (20) следует, что $\widetilde{Y}$ имеет жорданову форму:

$$\widetilde{Y} \sim \begin{bmatrix} M_1 + iM_2 & 0 \\ 0 & M_1 - iM_2 \end{bmatrix} + O(\lambda^{-2}), \quad \lambda \to \infty. \tag{21}$$

Из (16), (21) получаем соотношение (13).

Пусть λ удовлетворяет неравенству

$$|\sin\theta_j| \leqslant \frac{\delta}{\lambda}. \qquad (22)$$

При этом возможны разные случаи. Если λ удовлетворяет одновременно n неравенствам (22), то внедиагональные элементы матрицы $\widetilde{Y}$ имеют порядок $O(\lambda^{-2})$. Поэтому приходим к (21). В общем случае λ таково, что одновременно выполнены p из неравенств (22). Не умаляя общности, можно считать, что (22) выполнены для первых p индексов j, а для последних $n-p$ индексов j выполнены неравенства (17). В этом случае в матрице $\widetilde{Y}$ преобразованию необходимо подвергать последние $n-p$ элементов матрицы NT, для которых выполнены неравенства (17). В итоге приходим к оценке (13). Так как значения λ исчерпываются значениями, удовлетворяющими неравенствам (17), (22), то тем самым показано, что (13) верно при всех достаточно больших λ. Применяя к матрице, стоящей в (13) справа, теорему С. А. Гершгорина [1, с. 415], получаем, что каждое собственное число матрицы $X(t_0 + \omega, t_0, \lambda)$ лежит в одной из $2n$ областей комплексной плоскости μ (круги Гершгорина): $|\mu - a_j(\lambda) \pm ib_j(\lambda)| \leqslant O(\lambda^{-1}\varepsilon(\lambda^{-1}))$, $\lambda \to \infty$, $j = \overline{1, n}$.

Отсюда следуют формулы (14). Из (14) следуют асимптотические формулы для модулей мультипликаторов системы (10) $|\mu_{1,2}^{(j)}| = 1 + \dfrac{\beta_j}{2\lambda} + O(\lambda^{-1}\varepsilon(\lambda^{-1}))$, $\lambda \to \infty$, $j = \overline{1, n}$.

Если все $\beta_j < 0$, то при больших λ $|\mu_{1,2}^{(j)}| < 1$ $(j = \overline{1, n})$ и решения системы (10) асимптотически устойчивы. Если существует $\beta_j > 0$, то $|\mu_{1,2}^{(j)}| > 1$ при больших λ и решения системы (10) неустойчивы. Теорема доказана.

Примечания. а) Теорема 1 очевидным образом формулируется относительно системы (1); б) если функции $q_j(t)$ не пересекаются на $[0, \omega]$, то все формулы теоремы 1 верны с точностью $O(\lambda^{-2})$ [2]; в) случай, когда некоторые из функций $q_j(t)$ тождественно совпадают, а остальные удовлетворяют условиям теоремы 1, рассматривается аналогично; г) формулы (14) означают, что при больших λ мультипликаторы системы (10) находятся в $O(\lambda^{-1}\varepsilon(\lambda^{-1}))$-окрестности чисел $a_j(\lambda) \pm ib_j(\lambda)$. В частности, если λ такое, что эти числа лежат в $O(\lambda^{-1}\varepsilon(\lambda^{-1}))$-окрестности действительной оси, то система (10) может иметь мультипликаторы, лежащие на действительной оси.

Применим теорему 1 к системе (3). Сравнивая систему (3) с линеаризованной, имеющей вид (1), и применяя теорему Ляпунова [3, с. 60], получаем утверждение.

Теорема 2. *Пусть:* а) *ω-периодическая матрица $Q(t)$ удовлетворяет условиям теоремы* 1; б) *вектор-функция $f(t, y, h)$ $(h = \lambda^{-1}y')$ ω-периодична по t, определена в области $D = \{|y| \leqslant a, |h| \leqslant b\}$ и обладает в D непрерывными частными производными до второго порядка по y, h;* в) *в области D существует ω-периодическое решение $y^*(t, \lambda)$ системы* (3). *Тогда при достаточно больших λ решение $y^*(t, \lambda)$ будет асимптотически устойчивым, если для всех $j = \overline{1, n}$ $\displaystyle\int_0^\omega \frac{\partial f_j}{\partial h_j}(t, y^*, h^*)\,dt < 0$, и неустойчивым, если хоть при одном j $\displaystyle\int_0^\omega \frac{\partial f_j}{\partial h_j}(t, y^*, h^*)\,dt > 0$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: Наука, 1967.— 576 с.
2. Павлюк И. А. Об исследовании неавтономных систем дифференциальных уравнений второго порядка с помощью дифференциальных инвариантов.— Дифференц. уравнения, 1968, **4**, № 10, с. 1785—1800.
3. Розо М. Нелинейные колебания и теория устойчивости.— М.: Наука, 1971.— 288 с.
4. Эрдейи А. Асимптотические разложения.— М.: Физматгиз, 1962.— 128 с.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
6.VIII 1979 г.