УДК 519.46

А. Сарыев

Периодические топологические группы с локально компактной решеткой замкнутых подгрупп

Этой заметкой продолжается начатое в [1, 2] изучение топологических групп G по свойствам топологизированных решеток $\mathfrak{L}_E$ (G) их замкнутых подгрупп. В [1] описаны локально компактные группы G с компактной в E-топологии решеткой $\mathfrak{L}$ (G) (EK-группы). Известно также [2] строение локально компактных групп с дискретной $\mathfrak{L}_E$ (G). Топологическую группу G с локально компактной решеткой $\mathfrak{L}_E$ (G) будем называть ELK-группой. Цель данной заметки — показать, что периодические локально компактные ELK-группы, обладающие конечными субнормальными рядами замкнутых подгрупп с $\overline{FC}$-факторами (в частности, периодические разрешимые ELK-группы), исчерпываются конечными расширениями EK-групп.

Напомним, что топологическая группа G называется компактно покрываемой, если любой элемент $g \in G$ содержится в компактной подгруппе.

Вполне несвязная компактно покрываемая группа называется периодической. Топологические $\overline{FC}$-группы — это группы с предкомпактными классами сопряженных элементов. В дальнейшем сохраняются терминология и обозначения, принятые в [1], в частности, подгруппами топологической группы называются лишь замкнутые подгруппы.

Лемма 1. *Подгруппа и фактор-группа ELK-группы по открытому либо компактному нормальному делителю являются ELK-группами.*

Доказательство. Пусть H — подгруппа, N — нормальный делитель ELK-группы G. По лемме 2 из [1] интервалы $[\langle e\rangle, H]$, $[N, G]$ замкнуты в $\mathfrak{L}_E(G)$ и, следовательно, локально компактны. Пусть отображение φ каждой подгруппе из $[N, G]$ сопоставляет ее образ при естественном гомоморфизме G на G/N. По лемме 5 из [1] интервал $[\langle e\rangle, H]$ гомеоморфен $\mathfrak{L}_E(H)$, а φ — непрерывное отображение $[N, G]$ на $\mathfrak{L}_E(G/N)$. Если N компактен либо открыт, нетрудно заключить, что φ открыто. Значит, H и G/N — ELK-группы.

Лемма 2. *Пусть x — компактный элемент вполне несвязной локально компактной группы G. Если направленность $\{x_\alpha\}$, $\alpha\in J$, элементов группы G сходится к x, то направленность подгрупп $\{\overline{\langle x_\alpha\rangle}\}$, $\alpha\in J$, сходится в E-топологии к $\overline{\langle x\rangle}$,*

Доказательство. Пусть $U, V_1, \dots, V_n$ — открытые множества из G, $\overline{\langle x\rangle}\in D_1(U)\cap D_2(V_1)\cap\dots\cap D_2(V_n)$. Выберем открытую компактную подгруппу H так, чтобы $\overline{\langle x\rangle} H\subseteq U$. В силу компактности $\overline{\langle x\rangle}$ найдется такая открытая подгруппа H_1, что $y^{-1}H_1y\subseteq H$ для любого $y\in\overline{\langle x\rangle}$. Если $x_\alpha\in \in xH_1$, то $x_\alpha^n=(xh_\alpha)^n=x^n(x^{n-1})^{-1}h_\alpha x^{n-1}\dots h_\alpha\in\overline{\langle x\rangle}H$. Значит, $\overline{\langle x_\alpha\rangle}\in D_1(U)$. Уменьшая, если необходимо, H_1, можно добиться что $\overline{\langle x_\alpha\rangle}\in D_2(V_1)\cap\dots \dots\cap D_2(V_n)$.

Лемма 3. *Пусть G вполне несвязная локально компактная группа, A — подгруппа, изоморфная $\mathbf{C}_{p^\infty}$ либо $\mathbf{R}_p$. Если A имеет компактную окрестность $\mathfrak{A}$, то A открыта.*

Доказательство. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность образующих A, причем $\overline{\langle a_n\rangle}\subset\overline{\langle a_{n+1}\rangle}$ для всех $n=1, 2, \dots$. По лемме 3 из [1] A является пределом последовательности подгрупп $\{\overline{\langle a_n\rangle}\}$, $n=1, 2, \dots$. Поэтому, начиная с некоторого номера n_0, $\overline{\langle a_n\rangle}\in\mathfrak{A}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $n_0=1$.

Пусть U, V такие окрестности единицы, что $V^2\subseteq U$ и $a_iU\cap a_jV=\varnothing$ для всех $i\neq j$. Предположим, что A не является открытой. Так как $\mathfrak{A}$ — окрестность $\overline{\langle a_1\rangle}$, пользуясь леммой 2 выберем $x_1\in V$ так, чтобы $\overline{\langle a_1x_1\rangle}\in \in\mathfrak{A}_1$ и $x_1\notin A$. Пусть V_1 — окрестность a_1x_1 и $\overline{V}_1\cap A=\varnothing$. Подберем $x_2\in \in V$ и окрестность V_2 элемента a_2x_2 так, чтобы $\overline{\langle a_2x_2\rangle}\in\mathfrak{A}_2=\mathfrak{A}_1\cap D_1(G\setminus \setminus \overline{V}_1)$, $x_2\notin A$ и $\overline{V}_2\cap A=\varnothing$ и т. д. В результате будет построена последовательность подгрупп $\{\overline{\langle a_ix_i\rangle}\}$, $i=1, 2, \dots$ из $\mathfrak{A}$. Пусть H — предельная точка этой последовательности. Поскольку для всех $j>i$ $\overline{\langle a_jx_j\rangle}\in \in D_2(V_i)$, $a_ix_i\notin H$. В силу выбора окрестностей U, V и последовательности $\{x_n\}$ $a_ix_iV\cap a_jx_jV=\varnothing$. Значит, $B=\{a_1x_1, \dots, a_nx_n, \dots\}$ дискретно и замкнуто. Однако в окрестности $D_1(G\setminus B)$ подгруппы H нет ни одной подгруппы $\overline{\langle a_nx_n\rangle}$. Наступило противоречие с компактностью $\mathfrak{A}$.

Лемма 4. *Пусть G — периодическая локально компактная $\overline{FC}$-группа. Если G имеет компактную окрестность $\mathfrak{A}$, то найдется такой компактный нормальный делитель N, что G/N — EK-группа.*

Доказательство. Пусть $V_1, \dots, V_n$ — открытые подмножества из G и $D_2(V_1)\cap D_2(V_2)\cap\dots\cap D_2(V_n)\subseteq\mathfrak{A}$. Если $g_1\in V_1, \dots, g_n\in V_n$, то $[\overline{\langle g_1 \dots \dots, g_n\rangle}, G]\subseteq\mathfrak{A}$. Из [3] следует, что $g_1, \dots, g_n$ содержатся в компактном нормальном делителе N. Так как $[N, G]$ замкнут, гомеоморфен $\mathfrak{L}_E(G/N)$ и содержится в $\mathfrak{A}$, G/N — EK-группа.

Лемма 5. *Если локально компактная группа G является конечным расширением EK-группы H, то G — ELK-группа.*

Доказательство. Если H компактна, то компактна и G, а по теореме 1 из [1] G — EK-группа. Пусть G дискретна, F-подгруппа из G. Рассмотрим произвольную направленность $\{F_\alpha\}$, $\alpha \in J$, подгрупп из окрестности $D_1(F) \cap D_2(x_1) \cap \ldots \cap D_2(x_n)$ подгруппы F, где $x_1, \ldots, x_n$ — представители смежных классов F по $F \cap H$. В силу компактности $[\langle e \rangle, H]$ из направленности $\{F_\alpha \cap H\}$, $\alpha \in J$, можно выделить поднаправленность $\{F_\beta \cap \cap H\}$, $\beta \in J_1$, сходящуюся к некоторой подгруппе X. Тогда направленность $\{F_\beta\}$, $\beta \in J_1$ сходится к $\overline{\langle X, x_1, \ldots, x_n \rangle}$.

Ввиду теоремы 4 из [1] осталось рассмотреть случай, когда $H \simeq \mathbf{R}_p$. Пусть $B \in \mathfrak{L}_E(G)$, U — открытая компактная подгруппа из G, $y_1, \ldots, y_m$ — представители смежных классов B по $B \cap H$. Рассмотрим произвольную направленность $\{B_\alpha\}$, $\alpha \in J$, подгрупп из окрестности $D_1(BU) \cap D_2(y_1U) \cap \ldots \ldots \cap D_2(y_mU)$ подгруппы B. Из направленности $\{B_\alpha \cap H\}$, $\alpha \in J$, выделим поднаправленность $\{B_\beta \cap H\}$, $\beta \in J_1$, сходящуюся к некоторой подгруппе Y из H. Если Y компактна, то, начиная с некоторого номера $\beta_0 \in J_1$, все подгруппы B_β содержатся в некоторой компактной подгруппе. Иначе, $Y = H$ и $\{B_\beta\}$, $\beta \in J_1$ сходится к $\overline{\langle H, y_1, \ldots, y_m \rangle}$.

Теорема. *Пусть периодическая локально компактная группа G имеет конечный субнормальный ряд с $\overline{FC}$-факторами. Тогда G является ELK-группой в том и только том случае, если она принадлежит одному из следующих классов групп:*

1) *G — компактна;*

2) *G — конечное расширение прямого произведения конечного числа квазициклических групп по различным простым числам p;*

3) *G — конечное расширение подгруппы, изоморфной $\mathbf{R}_p$.*

Доказательство. Достаточность следует из леммы 5 и работы [1]. Необходимость докажем индукцией по длине n субнормального ряда $\langle e \rangle \subset N_1 \subset \ldots \subset N_n = G$ с $\overline{FC}$-факторами.

1) Пусть $n = 1$, т. е. G — $\overline{FC}$-группа. По лемме 4 найдется такой компактный нормальный делитель N, что G/N — EK-группа. Из описания EK-групп и следствия 5 из [4] вытекает, что G содержит подгруппу A, изоморфную $\mathbf{C}_{p^\infty}$ либо $\mathbf{R}_p$.

Если $A \simeq \mathbf{C}_{p^\infty}$, по лемме 3 G дискретна. Значит, N конечна, а $G/N \simeq \simeq \mathbf{C}_{p_1^\infty} \times \ldots \times \mathbf{C}_{p_n^\infty} \times K$, где $p_1, \ldots, p_n$ — различные простые числа, K конечна (см. [1]). По теореме 1 из [5] G принадлежит классу (2).

Пусть $A \simeq \mathbf{R}_p$. По лемме 3 A открыта, а G не содержит подгрупп, изоморфных $\mathbf{C}_{q^\infty}$ либо $\mathbf{R}_q$ при $p \neq q$. Учитывая теорему 4 из [1], получим $|G:A| < \infty$. Из конечности индекса A в G вытекает, что A инвариантна в G. Следовательно, G принадлежит классу (3).

2). Предположим, теорема верна для групп, имеющих субнормальный ряд с $\overline{FC}$-факторами длины $k < n$.

3). По лемме 1 N_{n-1} — ELK-группа. По предположению индукции N_{n-1} принадлежит одному из классов (1) — (3). Пусть вначале N_{n-1} компактна. В силу леммы 1 и предположения индукции G/N_{n-1} также принадлежит одному из классов (1) — (3). Если G/N_{n-1} компактна, то компактна и G. Предположим, что G/N_{n-1} принадлежит классу (2) или (3). По следствию 5 из [4] G содержит подгруппу B, изоморфную $\mathbf{C}_{p^\infty}$ либо $\mathbf{R}_p$. Если $B \simeq \mathbf{C}_{p^\infty}$, по лемме 3 G дискретна. Значит, N_{n-1} конечна и по теореме 1 из [5] G принадлежит классу (2). Если $B \simeq \mathbf{R}_p$, по лемме 3 B открыта и G не содержит подгрупп, изоморфных $\mathbf{C}_{q^\infty}$ либо $\mathbf{R}_q$ при $p \neq q$.

Значит, BN_{n-1}/N_{n-1} имеет конечный индекс в G/N_{n-1} и G принадлежит классу (3).

Предположим, что N_{n-1} принадлежит классу (2). По лемме 3 N_{n-1} открыта, а по лемме 1 и предположению индукции G/N_{n-1} также принадлежит классу (2). По теореме 1 из [5] G содержит делимую абелеву подгруппу конечного индекса. Учитывая предположение индукции, получаем, что G принадлежит классу (2).

И, наконец, пусть N_{n-1} принадлежит классу (3), $C \simeq R_p$ — подгруппа конечного индекса из N_{n-1}. Заметим, что C характеристична в N_{n-1}, а значит, инвариантна в G. Пусть F — открытая компактная подгруппа из C. Так как G/F — дискретная ELK-группа (лемма 1), по доказанному выше, G/F принадлежит классу (2). Пользуясь следствием 5 из [4] и леммой 3, заключаем, что C/F имеет конечный индекс в G/F. Значит, G принадлежит классу (3) и теорема доказана.

Следствие. *Дискретная локально конечная ELK-группа G является конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп по различным простым числам p.*

Доказательство. Из леммы 1 и теоремы следует, что любая абелева подгруппа из G черниковская. Ввиду [6] G также черниковская и, значит, имеет конечный нормальный FC-ряд.

ЛИТЕРАТУРА

1. Протасов И. В. Топологические группы с компактной решеткой замкнутых подгрупп.— Сиб. мат. журн., 1979, **20**, № 2, с. 378—385.
2. Протасов И. В., Чарин В. С. О решетке замкнутых подгрупп топологической группы.— В кн.: 14 Всесоюзная алгебраическая конференция: Тез. докл. Новосибирск, 1977, с. 56—57.
3. Ушаков В. И. Топологические группы, близкие к бикомпактным.— Сиб. мат. журн., 1963, **4**, № 3, с. 689—694.
4. Полецких В. М. О топологических группах, близких к группам ранга один.— Укр. мат. журн., 1976, **28**, № 6, с. 772—781.
5. Черников С. Н. О периодических группах автоморфизмов экстремальных групп.— Мат. заметки, 1968, **4**, № 1, с. 91—96.
6. Шунков В. П. О проблеме минимальности для локально конечных групп.— Алгебра и логика, 1970, **9**, № 2, с. 220—248.

Туркменский
педагогический институт

Поступила в редакцию
15.VI 1979 г.