УДК 519.41/47

Н. Н. Семко

Некоторые виды неабелевых групп с заданной системой инвариантных бесконечных абелевых подгрупп

В работе [1] изучались бесконечные неабелевы группы, которые имеют бесконечные абелевы подгруппы, и каждая подгруппа такого рода — инвариантна (эти группы получили в ней название IH-групп). Настоящая статья посвящена обобщению IH-групп. Расширение класса IH-групп достигается в ней с помощью следующего определения. Бесконечная неабелева группа G называется $H(I)$-группой, если в ней существует такая бесконечная подгруппа A, что в G инвариантна каждая абелева подгруппа, имеющая с A бесконечное пересечение. Вопрос о $H(I)$-группах был предложен автору С. Н. Черниковым.

В данной статье $H(I)$-группы рассматриваются при дополнительном условии локальной разрешимости.

Лемма. *Пусть G-локально разрешимая $H(I)$-группа и A — ее бесконечная подгруппа со следующими свойствами.*

1. *В G инвариантна каждая абелева подгруппа, которая имеет с A бесконечное пересечение.*

2. *A не является конечным расширением квазициклической группы. Тогда любая подгруппа из централизатора $C_G(A)$ инвариантна в группе G.*

Доказательство. Случай 1. Подгруппа A непериодическая. Пусть a — какой-нибудь ее элемент бесконечного порядка. Если b — любой элемент из $C_G(A)$, для которого $\langle b\rangle \cap \langle a\rangle = 1$, то $\langle b\rangle \Delta G$. В самом деле, рассмотрим убывающую последовательность подгрупп $B_i = \langle a^{2^i}\rangle \times \times \langle b\rangle$, где $i = 0, 1, 2, \ldots$. Очевидно, что при любом i подгруппа $B_i \cap A$ бесконечна. Так как G — $H(I)$-группа, то $B_i \Delta G$ и поскольку $\bigcap\limits_{i=0}^{\infty} B_i = \langle b\rangle$, то и $\langle b\rangle \Delta G$. Если g — какой-нибудь элемент из $C_G(A)$, для которого $\langle g\rangle \cap \cap \langle a\rangle = M \neq 1$, то циклическая подгруппа M бесконечна, и потому ввиду определения $H(I)$-групп $\langle g\rangle \Delta G$. Следовательно, в G инвариантны все циклические подгруппы из $C_G(A)$, а значит, и все подгруппы из $C_G(A)$. Таким образом, в рассматриваемом случае лемма верна.

Случай 2. Подгруппа A периодическая и не удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. При этом предположении A имеет бесконечную подгруппу B, разлагающуюся в прямое произведение циклических групп простых порядков [2]. Тогда для любого $g \in C_G(A)$ найдется такая бесконечная подгруппа $R < B$, что $\langle g\rangle \cap R = 1$. Пусть $R = R_1 \times R_2$ — какое-нибудь разложение группы R в прямое произведение двух бесконечных множителей. Из определения $H(I)$-группы следует, что $R_1 \Delta G$, $R_1 \times \langle g\rangle \Delta G$, $R_2 \Delta G$, $R_2 \times \langle g\rangle \Delta G$. Ввиду соотношения $(R_1 \times \langle g\rangle) \cap (R_2 \times \langle g\rangle) = \langle g\rangle$, циклическая подгруппа $\langle g\rangle$ инвариантна в G. Так как g — произвольный элемент из $C_G(A)$, то это означает, что все подгруппы из $C_G(A)$ инвариантны в G. Следовательно, и в этом случае лемма верна.

Случай 3. Подгруппа A — периодическая и удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. При этом предположении подгруппа A черниковская [2]. Обозначим через F максимальную полную подгруппу группы A, а подгруппу группы F, разлагающуюся в прямое произведение двух квазициклических подгрупп A_1 и A_2, через D (подгруппы A_1 и A_2 существуют ввиду предположения о группе A). Пусть $M = \langle g\rangle \cap D$, где g — произвольный элемент из $C_G(A)$. Покажем, что $M \Delta G$. В самом деле, произвольная силовская p-подгруппа из M, будучи циклической подгруппой из D, содержится в некоторой квазициклической подгруппе из F, и потому инвариантна в G (так как все квазициклические подгруппы из F инвариантны в G). Отсюда следует, что $M \Delta G$.

Так как подгруппа $D\langle g\rangle$ инвариантна в G, то $D\langle g\rangle/M = D/M \times \times \langle g\rangle/M$ — инвариантная подгруппа группы G/M. Группа D/M — полная абелева, ее можно представить в виде прямого произведения $A_1^*/M \times A_2^*/M$ двух квазициклических групп. Но тогда справедливо соотношение $D\langle g\rangle/M = A_1^*/M \times A_2^*/M \times \langle g\rangle/M$. Поскольку $A_1^*\langle g\rangle \Delta G$ и $A_2^*\langle g\rangle \Delta G$, то обе подгруппы $A_1^*/M \times \langle g\rangle/M$ и $A_2^*/M \times \langle g\rangle/M$ инвариантны в G/M и, значит, инвариантно в G/M и их пересечение $\langle g\rangle/M$. Переходя к группе G, получаем, что $\langle g\rangle \Delta G$. Следовательно, лемма верна и в последнем из рассматриваемых случаев. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть G — локально разрешимая $H(I)$-группа и A — такая ее бесконечная подгруппа, что в G инвариантна каждая абелева подгруппа, имеющая с A бесконечное пересечение. Тогда группа G имеет инвариантную подгруппу B, которая определяет абелеву фактор-группу G/B и удовлетворяет одному из следующих условий. 1. Если подгруппа A не конечное расширение квазициклической группы, то: а) любая инвариантная абелева подгруппа из G содержится в B; б) все подгруппы из B инвариантны в G.*

2. *Если подгруппа A является конечным расширением квазициклической группы R, то*: а) $B = C_G(R)$; б) *все подгруппы из B/R инвариантны в G/R*.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда подгруппа A не является конечным расширением квазициклической группы. При этом предположении подгруппа A содержит подгруппу A_0, являющуюся либо бесконечной циклической группой, либо бесконечной группой, разлагающейся в прямое произведение циклических групп простых порядков, либо группой, разлагающейся в прямое произведение двух квазициклических групп [2]. Так как все абелевы подгруппы из G, которые имеют с A_0 бесконечное пересечение, очевидно, инвариантны в G, то ввиду предыдущей леммы группа G содержит такую инвариантную дедекиндову подгруппу $K = C_G(A_0)$, что все подгруппы из K инвариантны в G. Поскольку $K \geqslant A_0$, то все подгруппы из A_0 инвариантны в G. Тогда централизатор $C_G(A_0)$ является пересечением централизаторов всех циклических подгрупп из A_0. Так как группа автоморфизмов всякой циклической группы абелева, то отсюда следует, что фактор-группа G/K абелева.

Покажем, что все подгруппы из $H = DF$ инвариантны в G, где D — произвольная инвариантная абелева подгруппа из G и F — какая-нибудь содержащая подгруппу K подгруппа из G, все подгруппы которой инвариантны в G. Пусть A_1 — централизатор подгруппы D в подгруппе A_0. Пользуясь тем, что все подгруппы из A_0 инвариантны в G, нетрудно убедиться, что подгруппа A_1 бесконечна и не является конечным расширением квазициклической группы. Подгруппа A_1 содержится в центре группы F, так как, очевидно, F — дедекиндова группа и поэтому централизатор $C_G(A_1)$ подгруппы A_1 в G содержит подгруппу F. Поскольку подгруппа A_1 входит в централизатор подгруппы D в G, то централизатор $C_G(A_1)$ содержит подгруппу D, и поэтому $C_G(A_1) \geqslant H$. Отсюда и ввиду предыдущей леммы (так как все абелевы подгруппы из G, имеющие с A_1 пересечение, очевидно, инвариантны в G) получаем, что все подгруппы из H инвариантны в G.

Рассмотрим подгруппу B группы G, порожденную подгруппой K и всеми инвариантными абелевыми подгруппами из G. Подгруппу B можно рассматривать как объединение возрастающей (трансфинитной, вообще говоря) цепочки подгрупп, каждая из которых является произведением такой содержащей подгруппу K подгруппы из G, все подгруппы которой инвариантны в G, и некоторой инвариантной абелевой подгруппы из G. По доказанному каждый член этой цепочки обладает свойством б) условия 1 теоремы. Поэтому им обладает и группа B.

Так как $B \geqslant K$, то фактор-группа G/B абелева. Следовательно, первое утверждение теоремы относящееся к случаю, когда подгруппа A не является конечным расширением квазициклической группы, справедливо.

Будем предполагать, далее, что подгруппа A — конечное расширение квазициклической группы; обозначим последнюю через R, а ее централизатор в G через B. Так как подгруппа R, очевидно, инвариантна в G, то инвариантна в G и подгруппа B.

Но тогда ввиду цикличности любой периодической подгруппы группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, R$ группы R (см., например, [3]) фактор-группа G/B будет абелевой. Пусть bR — произвольный элемент группы B/R. Из определения $H(I)$-группы следует, что подгруппа $R\langle b\rangle$ инвариантна в G и поэтому подгруппа $R\langle b\rangle/R$ инвариантна в G/R. Но это означает, что в G/R инвариантны все подгруппы из B/R. Следовательно, справедливо и второе утверждение теоремы. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 1 вытекает справедливость следующих предложений.

Теорема 2. *Пусть G — локально разрешимая $H(I)$-группа и B — ее подгруппа, имеющая свойство* 1) *или* 2), *указанное в теореме* 1. *Тогда в*

G существует бесконечная абелева подгруппа N, удовлетворяющая следующим условиям.

1. $C_G\ (N) = B$.

2. *B G инвариантна каждая абелева подгруппа из G, которая имеет с N бесконечное пересечение.*

3. *N либо квазициклическая группа, либо не является конечным расширением квазициклической группы.*

Теорема 3. *Пусть G — неабелева группа, N — ее бесконечная инвариантная подгруппа и $B = C_G(N)$. Группа G является $H\ (I)$-группой, если выполняется одно из следующих двух условий.*

1. *Если подгруппа N не является конечным расширением квазициклической группы, то:* а) *любая абелева подгруппа из G, которая имеет с N бесконечное пересечение, содержится в B;* б) *все подгруппы из B инвариантны в G.*

2. *Если подгруппа N является квазициклической группой, то: все подгруппы из B/N инвариантны в G/N.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Черников С. Н. Группы с инвариантными бесконечными абелевыми подгруппами.— В кн.: Группы с ограничениями для подгрупп. Киев, 1971, с. 47—65.
2. Черников С. Н. О локально разрешимых группах, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп.— Мат. сб., 1951, 28, № 1, с. 119—129.
3. Курош А. Г. Теория групп.— М.: Наука, 1967.— 648 с.

Киевский
педагогический институт

Поступила в редакцию
17.X 1979 г.