УДК 517.9

Н. Г. Сорокина

Единственность слабого решения одной граничной задачи для волнового уравнения

Для уравнения

$$\mathfrak{L}w \equiv w_{x_1x_1} + w_{x_2x_2} - w_{x_3x_3} = f \tag{1}$$

в области $G \subset R_3$, ограниченной поверхностью $\Gamma_0 : x_3 = 0$ и двумя характеристиками $\gamma : x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ и $\gamma_0 : x_3 = 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ выражения $\mathfrak{L}$, автором была исследована обобщенная разрешимость граничной задачи — одного из многомерных аналогов задачи Дарбу [1]:

Задача. Найти решение уравнения (1) в области G, удовлетворяющее на границе $\Gamma = \Gamma_0 \cup \gamma_0 \cup \gamma$ условиям

$$w/_{\Gamma_0 \cup \gamma_0} = 0, \quad (w_{x_1}n_2 - w_{x_2}n_1)/_{\gamma} = 0 \tag{2}$$

($n = (n_1, n_2, n_3)$ — внешняя нормаль к Γ).

Доказана слабая разрешимость задачи (1), (2) в следующем смысле: при любой функции $f \in L_2(G)$ существует функция $w \in W_2^1(G)$, удовлетворяющая на Γ граничным условиям (в слабом смысле)

$$w/_{\Gamma_0} = 0, \quad (w_{x_1}n_1 + w_{x_2}n_2 - w_{x_3}n_3)/_{\gamma_0} = 0, \quad (w_{x_1}n_2 - w_{x_2}n_1)/_{\gamma} = 0 \tag{3}$$

и такая, что $-(w_{x_1}, \psi_{x_1}) - (w_{x_2}, \psi_{x_2}) + (w_{x_3}, \psi_{x_3}) = (f, \psi)$ $\forall \psi \in C_0^\infty(G)$ в смысле скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ в $L_2(G)$.

Если слабое решение w принадлежит $W_2^2(G)$, оно удовлетворяет условиям (2) и является решением в обычном смысле. Однако, в отличие от плоского случая, сильным слабое решение $w \in W_2^1(G)$, вообще говоря, не будет. Это следует из неединственности решения сопряженной однородной граничной задачи [2, 3]. Мы покажем, что тем не менее верна такая теорема.

Теорема. *Слабое решение $w \in W_2^1(G)$ граничной задачи* (1), (2) *единственно.*

Доказательство. Для доказательства достаточно обосновать неравенство

$$(\mathfrak{L}w, aw_{x_1} + bw_{x_2} + cw_{x_3}) \geqslant C \| w \|_{W_2^1(G)}, \quad C > 0, \tag{4}$$

для слабых решений $w \in W_2^1(G)$, где $(a, b, c) = (-x_1, -x_2, \varepsilon x_3) = t$ — набор гладких коэффициентов. Здесь и ниже используются обозначения, принятые в [1]. Число $\varepsilon > 0$ указано в доказательстве теоремы существования.

Пусть $w \in W_2^1(G)$ — слабое решение (1), (2). Тогда функция $u = (u_1, u_2, u_3) = (w_{x_1}, w_{x_2}, w_{x_3})$ будет слабым решением системы дифференциальных уравнений первого порядка [1]

$$Lu = g, \quad L = L_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad g = (f, 0, 0), \tag{5}$$

сопоставленной уравнению (1). Это слабое решение удовлетворяет граничным условиям

$$\left(u_1 \frac{x_1}{\rho} + u_2 \frac{x_2}{\rho} \right) \Bigg|_{\Gamma_0} = 0, \; (u_1 n_1 + u_2 n_2 - u_3 n_3)|_{\gamma_0} = 0, \quad (u_1 n_2 - u_2 n_1)|_{\gamma} = 0, \tag{6}$$

где $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Для гладких функций u, удовлетворяющих условиям (6), в [1] доказано неравенство

$$(Lu, Z'u) = (Ku, u) \geqslant C \| u \|^2_{L_2(G)}, \quad C > 0. \tag{7}$$

Здесь Z — матрица с гладкими элементами, такая, что оператор $K = ZL = K_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ симметричен:

$$Z = \begin{pmatrix} -x_1 & \frac{x_2}{\rho} & \varepsilon x_3 \frac{x_1}{\rho} \\ -x_2 & -\frac{x_1}{\rho} & \varepsilon x_3 \frac{x_2}{\rho} \\ \varepsilon x_3 & 0 & -\rho \end{pmatrix}.$$

Если функция $u = (w_{x_1}, w_{x_2}, w_{x_3})$ — гладкое решение (5), (6), то $(Lu, Z'u) = (\mathfrak{L}w, aw_{x_1} + bw_{x_2} + cw_{x_3})$, и поэтому из (7)

$$(\mathfrak{L}w, aw_{x_1}, + bw_{x_2} + cw_{x_3}) \geqslant C \sum_{i=1}^{3} \| w_{x_i} \|^2_{L_2(G)} \geqslant C' \| w \|^2_{W_2^1(G)}$$

(последнее неравенство верно, так как $w|_{\Gamma_0} = 0$). Таким образом, выполняется неравенство (4). Достаточно доказать, что (7) имеет место для слабых решений задачи (5), (6) или, что равносильно, для слабых решений уравнения

$$Ku = h, \quad h = Zg, \tag{8}$$

удовлетворяющих условиям (6). Далее используются методы и терминология работы [4]. Неравенство (7) верно для полусильных решений задачи (8), (6) [4, следствие 1 теоремы 3.1].

Лемма. *Всякое слабое решение задачи* (8), (6), *тождественно равное нулю в окрестности начала координат, является полусильным.*

Доказательство. В соответствии с методами работы [4] достаточно установить лемму в предположении, что носитель функции u — любая достаточно малая подобласть области G — внутренняя, примыкающая к гладкому участку Γ или к линиям $\gamma_0 \cap \gamma$, $\gamma_0 \cap \Gamma_0$. При этом затруднения возникают только вблизи границы. Ниже убедимся, что ранг характеристической матрицы $K_n = K_i n_i$ постоянен и равен 2 на гладких участках Γ_0, γ_0, γ. Поэтому слабое решение, аннулирующееся вне подобластей, примыкающих к таким участкам,— полусильное [4. Теорема 2.1].

Рассмотрим ситуацию вблизи $\gamma_0 \cap \gamma$. Введем унитарные преобразования

$$F_1 = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\rho} & \frac{x_2}{\rho} & 0 \\ \frac{x_2}{\rho} & -\frac{x_1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Положим $u = F_1\tilde{u}$, $\tilde{u} = F_2\tilde{\tilde{u}}$, $u = F_1F_2\tilde{\tilde{u}} = F\tilde{\tilde{u}}$ и перейдем к равносильному (8) уравнению $F'KF\tilde{\tilde{u}} = s$, $s = F'h$. Симметричная матрица $F'K_nF$ примет диагональный вид одновременно на γ и на γ_0. Действительно, учитывая, что на γ_0 $n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x_1}{\rho}, \frac{x_2}{\rho}, 1\right)$, на γ $n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{x_1}{\rho}, -\frac{x_2}{\rho}, 1\right)$, и соотношение [1]

$$(K_n u\cdot u)|_{\gamma\cup\gamma_0} = \frac{1}{t\cdot n}\left[(u_1n_1 + u_2n_2 - u_3n_3)^2(\rho^2 - c^2) - (u_1n_2 - u_2n_1)^2(\rho - c)^2\right],$$

получаем

$$F'K_nF\tilde{\tilde{u}}\cdot\tilde{\tilde{u}} = K_nF_1\tilde{u}\cdot F_1\tilde{u} = \frac{1}{t\cdot n}\left[\left(\frac{\pm\tilde{u}_1 - \tilde{u}_3}{\sqrt{2}}\right)^2(\rho^2 - c^2) - \frac{\tilde{u}_2^2}{2}(\rho - c)^2\right], \quad (10)$$

где плюс при $\tilde{u}_1$ отвечает γ_0, минус—γ. Так как $\frac{\tilde{u}_1 + \tilde{u}_3}{\sqrt{2}} = \tilde{\tilde{u}}_1$, $\frac{\tilde{u}_1 - \tilde{u}_3}{\sqrt{2}} = \tilde{\tilde{u}}_3$, $\tilde{u}_2 = \tilde{\tilde{u}}_2$, отсюда $(F'K_nF\tilde{\tilde{u}}\cdot\tilde{\tilde{u}})|_\gamma = \frac{\sqrt{2}}{\rho + c}\left[\tilde{\tilde{u}}_1^2(\rho^2 - c^2) - \frac{\tilde{\tilde{u}}_2^2}{2}(\rho - c)^2\right]$;

$$(F'K_nF\tilde{\tilde{u}}\cdot\tilde{\tilde{u}})|_{\gamma_0} = \frac{\sqrt{2}}{-\rho + c}\left[\tilde{\tilde{u}}_3^2(\rho^2 - c^2) - \frac{\tilde{\tilde{u}}_2^2}{2}(\rho - c)^2\right].$$

Перейдем к новому равносильному (8) уравнению $\tilde{K}\tilde{\tilde{u}} = \tilde{s}$, $\tilde{K} = AF'KF$, $\tilde{s} = As$, где A — диагональная матрица с диагональными элементами $A_{11} = (\rho + c)/(\rho^2 - c^2)\sqrt{2}$, $A_{22} = -(\rho + c)\sqrt{2}/(\rho - c)^2$, $A_{33} = (-\rho + c)/(\rho^2 - c^2)\sqrt{2}$. Тогда на γ $\tilde{K}_n$ примет вид

$$\tilde{K}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а на γ_0 $\tilde{K}_n$ останется диагональной. Соответственно граничные условия (6) на γ, γ_0 перейдут в условия $\tilde{\tilde{u}}_2|_\gamma = 0$, $\tilde{\tilde{u}}_3|_{\gamma_0} = 0$, а сопряженные к ним условия будут $\tilde{\tilde{v}}_1|_\gamma = 0$, $\tilde{\tilde{v}}_2|_{\gamma_0} = 0$. Теперь после гладкого распрямления участков границы γ и γ_0, например, переходом к переменным $\alpha=\sqrt{x_1^2+x_2^2}+x_3$, $\beta=\sqrt{x_1^2+x_2^2}-x_3$, $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{x_2}{x_1}$, ситуация аналогично [4, § 4] сводится к случаю подобласти, примыкающей к гладкому участку γ. Тем самым локализованное слабое решение является полусильным.

Пусть слабое решение аннулируется вне подобласти, примыкающей к $\gamma_0\cap\Gamma_0$. Перейдем к новым зависимым переменным $u=F_1F_3\tilde{u}$ с помощью преобразований (9) и от уравнения (8) к равносильному уравнению $\tilde{K}\tilde{u}=s$, где $\tilde{K}=\dfrac{1}{\rho}F_1KF_1F_3$, $s=\dfrac{1}{\rho}F_1h$. На γ_0 матрица $\tilde{K}_n=\dfrac{1}{\rho}F_1K_nF_1F_3=\dfrac{1}{\rho}F_1K_nF_1$ ($F_1K_nF_1$ находим из соотношения (10)). Условию (6) на γ_0 соответствует условие $(\tilde{u}_1-\tilde{u}_3)|_{\gamma_0}=0$. Сопряженным условием будет $\tilde{v}_2|_{\gamma_0}=0$.

На Γ_0 [1]

$$K_n=\begin{pmatrix}0&0&x_1\\0&0&x_2\\x_1&x_2&0\end{pmatrix},\quad \tilde{K}_n=\frac{1}{\rho}F_1K_nF_1F_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\tilde{K}_n/_{\Gamma_0}$ диагональна с постоянными коэффициентами. Условию (6) на Γ_0 соответствует условие $\tilde{u}_1/_{\Gamma_0}=0$, сопряженным условием будет $\tilde{v}_3/_{\Gamma_0}=0$. После распрямления участка γ_0 ситуация основа аналогична рассмотренной в [4, § 4], когда условиям на совокупность компонент функции u на γ_0 отвечают снятые условия для одноименных компонент функции v и обратно. Локализованная граничная задача сводится к случаю подобласти, примыкающей к гладкому участку Γ_0. Следовательно, ее слабое решение является полусильным. Лемма доказана.

Возвратимся к доказательству теоремы. Пусть $u\in L_2(G)$ — слабое решение задачи (8), (6), $\Phi\in C^1(\bar{G})$ — функция, тождественно равная нулю в некоторой окрестности начала координат. Тогда Φu — слабое решение уравнения $K(\Phi u)=\Phi h+(\Phi_{x_i}K_i)\,u\in L_2(G)$ и, следовательно, в силу леммы, — полусильное решение. Для Φu, следовательно, верно (7). Оно будет верно и для u, если найдется последовательность функций $\Phi_n\in C^1(\bar{G})$, каждая из которых равна нулю в некоторой окрестности начала координат, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n(x)=1\ \forall x\in G$; $\varliminf\limits_{n\to\infty}|(\Phi_n\Phi_{n_{x_i}}K_iu,\,u)|=0$ в соответствии с теорией несущественных особенностей работы [4, § 5].

В качестве Φ_n возьмем функции от $\rho=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, причем $\Phi_n\equiv0$ при $\rho\leqslant\dfrac{1}{n+1}$, $\Phi_n\equiv1$ при $\rho\geqslant\dfrac{1}{n}$. На интервале $\left]\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right[$ положим

$$\Phi_n=\begin{cases}2\left(\rho-\dfrac{1}{n+1}\right)(n+1)^2n^2, & \dfrac{1}{n+1}<\rho\leqslant\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n}\right),\\[2ex] 1-2\left(\rho-\dfrac{1}{n}\right)(n+1)^2n^2, & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n}\right)\leqslant\rho<\dfrac{1}{n},\end{cases}$$

$\Phi_n\in C^1(\bar{G})$, $0\leqslant\Phi_n\leqslant1$. Очевидно, производная $\Phi_{n_\rho}=O(n^2)$. Выражение $\Phi_{n_{x_i}}K_i=\Phi_{n_\rho}\dfrac{x_i}{\rho}\cdot\rho\cdot\dfrac{K_i}{\rho}=\Phi_{n_\rho}\rho K_0$, где $K_0=\dfrac{x_i}{\rho}\cdot\dfrac{K_i}{\rho}$ — представляет собой ограниченный оператор (матричные функции $\dfrac{K_i}{\rho}$ ограничены в $\bar{G}$ [1]). Обозначим через Δ_n пересечение цилиндра $\dfrac{1}{n+1}<\rho<\dfrac{1}{n}$ с областью

G. Очевидны неравенства $I_n = |(\Phi_n \Phi_{n_{x_i}} K_i u, u)| = |(\Phi_n \Phi_{n_\rho} \rho K_0 u, u)_{L_2(\Delta_n)}| \leqslant \leqslant C n^2 \frac{1}{n} \| u \|^2_{L_2(\Delta_n)} = Cn \| u \|^2_{L_2(\Delta_n)}$, $C > 0$. Если предположить, что $I_n > > \varepsilon > 0, n > N$, то отсюда получим $\| u \|^2_{L_2(G)} = \sum_{n=1}^{\infty} \| u \|^2_{L_2(\Delta_n)} > \frac{\varepsilon}{c} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, что противоречит предположению $u \in L_2(G)$. Теорема доказана.

Отметим в заключение, что граничные условия (6) для уравнения $x_3 (w_{x_1 x_1} + w_{x_2 x_2}) - w_{x_3 x_3} = f$, гиперболического при $x_3 > 0$, впервые рассматривались в работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Сорокина Н. Г. Обобщенная разрешимость одной граничной задачи для волнового уравнения.— Дифференц. уравнения, 1978, **14**, № 3, с. 561—564.
2. Tong Kwang-chang. On a Boundary Value Problem for the Wave Equation.— Science Record. New ver., 1957, **1**, № 5, p. 277—278.
3. Алдашев С. А. Об одном свойстве решений сингулярной задачи Коши для уравнения Эйлера — Дарбу — Пуассона.— Дифференц. уравнения, 1975, **11**, № 1, с. 3—7.
4. Lax P. D., Phillips R. S. Local Boundary Conditions for Dissipative Symmetric Linear Differential Operators.— Comm. Pure Appl. Math., 1960, **13**, № 3, p. 427—455.
5. Диденко В. П. О краевых задачах для трехмерного уравнения смешанного типа.— Дифференц. уравнения, 1975, **11**, № 1, с. 33—37.

Киевский
политехнический институт

Поступила в редакцию
3.IV 1979 г