УДК 517.948.32

А. И. Яцко

Обобщенная краевая задача Римана в пространствах L_p с весом

1. Пусть Γ — замкнутый ориентированный контур Ляпунова, разбивающий плоскость комплексного переменного на внутреннюю область D^+ и внешнюю D^-. Обобщенная краевая задача Римана ставится следующим образом: найти функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, аналитические соответственно в областях D^+ и D^-, по краевому условию на Γ:

$$\Phi^+(t) = a(t)\,\Phi^-(t) + b(t)\,\overline{\Phi^-(t)} + c(t), \tag{1}$$

где $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ — заданные функции.

Задача (1) рассматривалась многими авторами (см. [1—4]). В настоящей заметке она рассматривается в предположении, что функция $a(t)$ кусочно-непрерывна, $b(t)$ измерима. Устанавливаются достаточные условия нетеровости задачи (1) и оценки для чисел ее решений и условий разрешимости. Заметка продолжает исследования автора, начатые в [2].

Ниже покажем, что задачу (1) в исследуемом случае можно свести к случаю задачи, рассмотренной в работе [3], но в пространстве L_p с весом. Поэтому естественно с самого начала ставить обобщенную краевую задачу Римана (1) в весовом пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$, т. е. когда свободный член $c(t) \in L_p(\Gamma, \rho)$, $1 < p < \infty$, а искомая функция $\Phi^+(z)$ $(\Phi^-(z))$ принадлежит классу $E_p^+(\Gamma, \rho)$ $(\overset{\circ}{E}{}_p^-(\Gamma, \rho))$ — классу функций, аналитических в D^+ (D^-) и представимых там интегралами Коши с плотностью из $L_p(\Gamma, \rho)$, $1 < p < \infty$. Здесь вес $\rho(t) = \prod_{k=1}^{s} |t - t_k'|^{\alpha_k}$, $-1 < \alpha_k < p - 1$, $t_1', t_2', \ldots, t_s'$ — некоторая совокупность различных точек на контуре Γ.

Задачу (1) будем рассматривать на единичной окружности $\Gamma_0 = \{t : |t| = 1\}$, заметив, однако, что все результаты, касающиеся условий нетеровости и вычисления индекса, переносятся на случай любого контура Ляпунова.

Учтем также, что линейная зависимость решений l и условий разрешимости l' задачи (1) понимается над полем вещественных чисел.

В пространстве $L_p^{(n)}(\Gamma, \rho)$ заданных на Γ n-мерных вектор-функций с компонентами из $L_p(\Gamma, \rho)$, $1 < p < \infty$, определены покоординатно оператор сингулярного интегрирования S и проекторы $P = \frac{1}{2}(I + S)$, $Q = \frac{1}{2}(I - S)$; норма в пространстве $L_p^{(n)}(\Gamma, \rho)$ определяется так:

$$\|\{\varphi_j\}_1^n\|_{L_p^{(n)}(\Gamma,\rho)} = \left\{\int \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi_j(t)|^2\right)^{\frac{p}{2}} \rho(t)\,|dt|\right\}^{1/p}.$$

Для дальнейшего нам понадобится известный результат (см. [5]): оператор $T = P + GQ$, где $G(t)$ — $(n \times n)$-матрица-функция (м.-ф.) из L_∞, нетеров в $L_p^{(n)}(\Gamma, \rho)$, $1 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда почти всюду на Γ справедливо равенство

$$G(t) = G_+(t)\,\Lambda(t)\,G_-^{-1}(t), \tag{2}$$

где $G_\pm \in E_p^\pm(\Gamma, \rho)$, $G_\pm^{-1} \in E_q^\pm(\Gamma, \rho^{1-q})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $\Lambda(t) = (\delta_{ij} t^{\varkappa_j})_1^n$, δ_{ij} — символ Кронекера, числа $\varkappa_1 \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_n$ — целые и оператор $G_-\Lambda^{-1}QG_+^{-1}$ ограничен в $L_p^{(n)}(\Gamma, \rho)$. Представление (2) м.-ф. G, обладающее всеми указанными свойствами, будем называть ее Ф-факторизацией (см. [6]) в пространстве $L_p^{(n)}(\Gamma, \rho)$, $1 < p < \infty$.

Лемма*. *Пусть* $G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — *измеримая матрица-функция второго порядка, заданная на контуре* Γ_0. *Если функции* a, d *принадлежат* L_∞ *вместе со своими обратными, принимают на* Γ_0 *почти всюду положительные значения и при некотором* $\alpha \in (0, \pi/2)$

$$\operatorname{ess\,sup}_{\Gamma_0} \frac{|b(t)\, e^{\pm 2i\alpha} - \overline{c(t)}|}{2\sqrt{a(t)\cdot d(t)}} < \sin\alpha,$$

то м.-ф. $G(t)$ *Ф-факторизуема в* $L_p^{(n)}(\Gamma_0, \rho)$, *коль скоро* $\|S\|_{L_p(\Gamma_0,\rho)} < \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$; *ее частные индексы при этом равны нулю.*

2. Будем предполагать, что коэффициент $a(t)$ задачи (1) — кусочно-непрерывная функция с точками разрыва $t_1, \dots, t_m$. Некоторые из них могут совпадать с точками из совокупности $t_1', \dots, t_s'$. Каждой кусочно-непрерывной функции можно поставить в соответствие естественным образом ориентированную кривую $W_{p,\rho}(a)(\mu, t) = a(t-0) f(t, \mu) + a(t+0)[1 - f(t, \mu)]$, $\mu \in [0, 1]$, где

$$f(\mu, t) = \begin{cases} \dfrac{\sin\mu\theta e^{i(1-\mu)\theta}}{\sin\theta} \ (\theta = \pi - \delta) & \text{при } 0 < \delta < 2\pi, \ \delta \neq \pi, \\ \mu & \text{при } \delta = \pi. \end{cases}$$

Здесь

$$\delta(t) = \begin{cases} 2\pi/p & \text{при } t \in \Gamma_0 \setminus \{t_1', \dots, t_s'\}, \\ 2\pi(1 + \alpha_k)/p & \text{при } t = t_k \in \{t_1', \dots, t_s'\}. \end{cases}$$

Если $\inf\limits_{t,\mu} |W_{p,\rho}(a)| > 0$, то функция $a(t)$, как известно, называется p, ρ-неособенной; ее индекс, определяемый как число оборотов кривой $W_{p,\rho}(a)$ вокруг точки $z = 0$, будем обозначать через $\operatorname{Ind}_{p,\rho} a$

Для p, ρ-неособенной функции $a(t)$ отношение $\dfrac{a(t_k - 0)}{a(t_k + 0)}$ можно представить в виде $|a(t_k - 0)/a(t_k + 0)|\, e^{iu_k}$, $k = 1, 2, \dots, m$, где $-\delta(t_k) < u_k \leqslant -\delta(t_k) + 2\pi$, $u_k \neq \delta(t_k)$. Положим $\gamma_k = \dfrac{u_k}{2\pi} + \dfrac{1}{2\pi i} \ln\left|\dfrac{a(t_k - 0)}{a(t_k + 0)}\right|$ и введем новые неизвестные функции $\Phi_1^{\pm}(z)$ по формулам $\Phi^{\pm}(z) = \prod\limits_{k=1}^{m} \omega_k^{\pm}(z)\, \Phi_1^{\pm}(z)$, где $\omega_k^{+}(z) = (z - t_k)^{\gamma_k}$, $\omega_k^{-}(z) = \left(1 - \dfrac{t_k}{z}\right)^{\gamma_k}$, причем разрезы для функции z^{γ_k} проходят через точку t_k контура. Краевое условие (1) переходит в условие

$$\Phi_1^{+}(t) = a_1(t)\, \Phi_1^{-}(t) + b_1(t)\, \overline{\Phi_1^{-}(t)} + c_1(t), \tag{3}$$

где

$$a_1(t) = \prod_{k=1}^{m} t^{-\gamma_k} a(t), \quad c_1(t) = \prod_{k=1}^{m} (t - t_k)^{-\gamma_k} c(t),$$

$$b_1(t) = \prod_{k=1}^{m} e^{i\pi\bar{\gamma}_k}\, t_k^{-\bar{\gamma}_k}\, (t - t_k)^{-2i\operatorname{Im}\gamma_k}\, b(t),$$

---

* Для пространств $L_p(\Gamma)$ (без веса) лемма 1 установлена в [7].

но уже в пространстве $L_p(\Gamma_0, \rho_1)$, т. е. $\Phi_1^+(z)$ $(\Phi_1^-(z))$ принадлежит классу $E_p^+(\Gamma_0, \rho_1)$ $(\overset{\circ}{E}{}_p^-(\Gamma_0, \rho_1))$, $1 < p < \infty$. Коэффициент $a_1(t)$ есть функция непрерывная, а ее индекс Коши k совпадает с $\mathrm{Ind}_{p,\rho}a$.

Задачи (1) и (3) нетеровы лишь одновременно и имеют одинаковые числа линейно независимых решений l и условий разрешимости l'.

Как известно (см. [1]), исследование задачи (3) может быть сведено к исследованию краевой задачи Римана для двух пар функций с коэффициентом

$$G(t) = \frac{1}{\overline{a_1(t)}}\begin{pmatrix} |a_1(t)|^2 - |b_1(t)|^2 & tb_1(t) \\ -\overline{tb_1(t)} & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Известно также, что если функция f непрерывна, а м.-ф. F Ф-факторизуема в некотором пространстве $L_p^{(n)}(\Gamma, \rho)$, то м.-ф. fF также Ф-факторизуема в $L_p^{(n)}(\Gamma, \rho)$, а ее частные индексы получаются из частных индексов м.-ф. F сдвигом на индекс функции f. Поэтому для нетеровости задачи (3) в пространстве $L_p(\Gamma_0, \rho_1)$ с весом $\rho_1(t) = \prod\limits_j |t - c_j|^{\beta_j}$, где

$$\beta_j = \begin{cases} p\operatorname{Re}\gamma_j & \text{при } c_j = t_j \overline{\in} \{t_1', \ldots, t_s'\}, \\ \alpha_j & \text{при } c_j = t_j' \overline{\in} \{t_1, \ldots, t_m\}, \\ p\operatorname{Re}\gamma_j + \alpha_k & \text{при } c_j = t_j = t_k', \ j = 1, \ldots, m; \\ & \qquad\qquad\qquad\quad k = 1, \ldots, s, \end{cases}$$

а значит, и для нетеровости задачи (1) в пространстве $L_p(\Gamma_0, \rho)$ необходимо и достаточно, чтобы была Ф-факторизуема в $L_p^{(n)}(\Gamma_0, \rho_1)$ м.-ф.

$$G_0 = \begin{pmatrix} |a_1(t)|^2 - |b_1(t)|^2 & tb_1(t) \\ -\overline{tb_1(t)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассуждая по схеме, предложенной в работе [3], и используя лемму 1, получаем теорему.

Теорема 1. *Пусть функции*

$$\varphi_1 = \psi_1/\chi_1, \quad \varphi_2 = \psi_2/\chi_2 \quad (\psi_j, \chi_j \in H_\infty, \ j = 1, 2), \tag{5}$$

не имеющие общих полюсов в открытом единичном круге D, удовлетворяют условию

$$\operatorname{ess\,sup}_{\Gamma_0}\Biggl(\Biggl(\prod_{k=1}^m \left|\frac{a(t_k - 0)}{a(t_k + 0)}\right|^{-\frac{\arg t}{\pi}} |a(t)|^2 - \left|t\prod_{k=1}^m e^{i\pi\bar{\gamma}_k} t_k^{-\bar{\gamma}_k}(t - t_k)^{-2i\operatorname{Im}\gamma_k} b(t) - \right.$$
$$\left. - \varphi_1(t)\right|^2\Biggr)^{\frac{1}{2}} \Biggl(\left|t\prod_{k=1}^m e^{i\pi\bar{\gamma}_k} t_k^{-\bar{\gamma}_k}(t - t_k)^{-2i\operatorname{Im}\gamma_k} b(t) - \varphi_2(t)\right|^2 -$$
$$- \prod_{k=1}^m \left|\frac{a(t_k - 0)}{a(t_k + 0)}\right|^{-\frac{\arg t}{\pi}} |a(t)|^2\Biggr)^{\frac{1}{2}} \Biggl(\prod_{k=1}^m \left|\frac{a(t_k - 0)}{a(t_k + 0)}\right|^{-\frac{\arg t}{2\pi}} |a(t)|\,|\varphi_1(t) -$$
$$- \varphi_2(t)|\Biggr)^{-1} < \cos 2\operatorname{arcctg}\|S\|_{L_p(\Gamma_0, \rho_1)}, \tag{6}$$

и, кроме того,

$$(\psi_1\chi_2-\psi_2\chi_1)^{-1}\in M_\infty, \tag{7}$$

где M_∞ — линейная сумма класса Харди H_∞ с классом рациональных функций, полюса которых расположены вне контура Γ_0.

Тогда задача (1) *нетерова в $L_p(\Gamma_0, \rho)$, а для чисел l и l' имеют место соотношения $l=\max(0, 2k)$, $l'=\max(0, -2k)$, если $N\leqslant|k|$; $\max(0, 2k)\leqslant l\leqslant k+N$, $l'=l-2k$, если $N>|k|$. Здесь N — точное число нулей функции $\varphi_1-\varphi_2$ в D, а k — индекс непрерывной функции $a_1(t)$, определяемой формулой* (3).

Замечание 1. Пусть $-1<\beta_j<0$, $(j=1,\ldots,k)$; $0\leqslant\beta_j\leqslant p-2$, $(j=k+1,\ldots,m)$; $p-2<\beta_j<p-1$, $(j=m+1,\ldots,n)$, $p\geqslant 2$. Тогда при выполнении какого-либо из трех условий (см. [8]): 1) $\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j\leqslant p-2$, $k=0$, $n=m$; 2) $\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j\leqslant p-2$, $k=1$; 3) $\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j\geqslant p-2$, $m=k$, $n=k+1$, в теореме 1 вместо выражения $2\operatorname{arcctg}\|S\|_{L_p(\Gamma_0,\rho_1)}$ — будет стоять выражение $\frac{\pi}{\bar p}$, где $\bar p=\max(\bar p_0, \bar p_1, \ldots, \bar p_m)$, $p_0=p$, $\bar p_k=\max\left(p_k, \frac{p_k}{p_k-1}\right)$, $p_k=$ $=p(1+\beta_k)^{-1}$.

Задача (1) называется устойчивой, если устойчивы частные индексы $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ м.-ф. (4), т. е. $|\varkappa_1-\varkappa_2|\leqslant 1$ (см. [1]).

Теорема 2. *Пусть функции φ_1, φ_2 вида* (5) *удовлетворяют условию* (6) *и требованию $(\psi_1\chi_2-\psi_2\chi_1)^{-1}\in H_\infty$. Тогда задача* (1) *нетерова и устойчива в $L_p(\Gamma_0, \rho)$, $1<p<\infty$.*

В частности, задача (1) будет нетеровой и устойчивой в пространстве $L_p(\Gamma_0, \rho)$, если

$$\operatorname{ess\,sup}_{\Gamma_0}\left|\frac{b(t)}{a(t)}\right|<$$

$$<\prod_{k=1}^{m}\left|\frac{a(t_k-0)}{a(t_k+0)}\right|^{\left(\frac{1}{2}-\frac{\arg t_k}{2\pi}+\frac{\arg(t-t_k)}{\pi}-\frac{\arg t}{2\pi}\right)}\sin 2\operatorname{arcctg}\|S\|_{L_p(\rho_1)}.$$

Замечание 2. Результаты заметки легко переформулируются для случая, когда функция $a(t)=g(t)h(t)$, где $g(t)$ — функция из класса $\mathfrak{M}$ [4], а $h(t)$ — кусочно-непрерывная.

ЛИТЕРАТУРА

1. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.— М.: Наука, 1977.— 448 с.
2. Яцко А. И., Яцко С. И. Обобщенная краевая задача Римана с кусочно-непрерывными коэффициентами.— Укр. мат. журн., 1978, 30, № 5, с. 646—653.
3. Спитковский И. М. К теории обобщенной краевой задачи Римана в классах L_p.— Укр. мат. журн., 1979, 31, № 1, с. 63—73.
4. Спитковский И. М. О множителях, не влияющих на факторизуемость.— Докл. АН СССР, 1976, 231, № 6, с. 1300—1303.
5. Хведелидзе Б. В. Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной.—В кн.: Современные проблемы математики. М., Изд-во ВИНИТИ, 1975, 7, с. 5—162.
6. Спитковский И. М. Задача факторизации измеримых матриц-функций.— Докл. АН СССР, 1976, 227, № 3, с. 576—579.
7. Спитковский И. М. О факторизации матриц-функций, хаусдорфово множество которых расположено внутри угла.— Сообщ. АН ГрузССР, 1977, 86, № 3, с. 561—564.
8. Вербицкий И. Э., Крупник Н. Я. Точные константы в теоремах К. И. Бабенко и Б. В. Хведелидзе об ограниченности сингулярного оператора.— Сообщ. АН ГрузССР, 1977, 85, № 1, с. 21—23.