УДК 517.934

В. В. Анисович, В. Д. Калиновский

О нахождении седловой точки нелинейного функционала при наличии линейных дифференциальных связей

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu - v,\ t \in [t_0, t_1],\ Sx(t_1) = Qx(t_0),$$

$$\det(S) \neq 0,\ \det(Q) \neq 0,\ S = [s_{ik}],\ Q = [q_{ik}]\ (i, k = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

и функционал

$$I(u, v) = \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} (u^* K u + x^* M x - v^* C v)\, dt, \tag{2}$$

где $x(t) \in E^n$, $u(t) \in E^p$, $v(t) \in E^n$ — непрерывные; $A(t)$, $B(t)$, $K(t)$, $M(t)$, $C(t)$ — непрерывные матрицы соответствующих размерностей; при этом $K(t)$, $M(t)$, $C(t)$ — симметрические; $K(t)$, $C(t)$ — определенно положительные при всех $t \in [t_0, t_1]$ матрицы; $\varphi(x)$ — скалярная, однородная по x степени $\alpha \neq 0$ функция; $\varphi(x)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ — непрерывные по x ($*$ — знак транспонирования). Допустимыми будем считать такие $u(t) \in E^p$, $v(t) \in E^n$, $t \in [t_0, t_1]$, которым соответствует решение $x(t) \in E^n$ краевой задачи (1) и функционал (2) принимает конечное значение. Будем искать такие допустимые $(\bar{u}, \bar{v})$, чтобы выполнялось условие (седловое свойство):

$$I(\bar{u}, v) \leqslant I(\bar{u}, \bar{v}) \leqslant I(u, \bar{v}) \tag{3}$$

В [1] предлагается задачу типа (1)—(3) разбить на две вспомогательные: максимизации функционала (2) с учетом (1) по v при фиксированном u и минимизации функционала (2) с учетом (I) по u при фиксированном v [1, с. 328] с последующей проверкой седлового свойства (3). Полученные таким образом u, v, как отмечалось авторами, могут не удовлетворять условию (3). В этом случае предлагается стать на точку зрения, согласно которой одна из сторон играет первой [1]. Рассмотрим отличный от приведенного в [1] способ нахождения $(\bar{u}, \bar{v})$.

Введем матрицы $N(t)$, $N_1(t)$, которые являются решениями краевых задач

$$\frac{dN}{dt} = NBK^{-1}B^*N - NA - A^*N - M,\ N(t_1) = S^*(Q^*)^{-1} N(t_0)\, Q^{-1} S, \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dN_1}{dt} = N_1 N C^{-1} N N_1 + N_1 (NC^{-1} - A_1) + (C^{-1}N - A_1^*) N_1 + C^{-1} - BK^{-1}B^*, \\ &r^*(t_0)\, N_1(t_0)\, r(t_0) = r^*(t_1)\, N_1(t_1)\, r(t_1),\ N_1(t_1) = \nu N_1(t_0),\ \nu = \text{const},\ \nu \in E^1, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где $A_1 = NBK^{-1}B^* - A^*$, $r(t) \in E^n$ — решение краевых задач (6) — (7). При условии, что краевые задачи (4), (5) имеют единственные решения $N(t)$, $N_1(t)$ матрицы $N(t)$, $N_1(t)$ являются симметрическими. В этом легко убедиться, транспонируя (4), (5) с учетом свойств матриц K, M, C и единственности решений $N(t)$, $N_1(t)$.

Рассмотрим вспомогательные краевые задачи

$$\frac{dx}{dt} = -A_1^* x + (BK^{-1}B^* - C^{-1}NN_1 - C^{-1})\, r,\ Sx(t_1) = Qx(t_0), \tag{6}$$

$$\frac{dr}{dt} = [A_1 - NC^{-1}(E + NN_1)]\, r,\ r(t_1) = S^*(Q^*)_r^{-1}(t_0) - \frac{1}{2\alpha}[\operatorname{grad}_x \varphi(x(t_1))]^* \tag{7}$$

(E — единичная матрица). В дальнейшем предполагается, что краевая задача

$$\frac{dr}{dt} = A_1 r - Nv;\ r(t_1) = S^*(Q^*)_r^{-1}(t_0) - \frac{1}{2\alpha}[\operatorname{grad}_x \varphi(x(t_1))]^*,\ v(t) \in E^n, \tag{8}$$

имеет по крайней мере одно решение $r(t) \in E^n$.

Теорема. *Пусть существует единственное решение* ($\bar N$, $\bar N_1$, $\bar x$, $\bar r$) *краевых задач* (4)—(7). *Тогда существует решение* ($\bar u$, $\bar v$) *задачи* (1)—(3) *и* $\bar u(t)$, $\bar v(t)$ *вычисляется по формулам*

$$\bar u(t) = -K^{-1}(B^*\bar N\bar x - B^*\bar r),\ \bar v(t) = C^{-1}(E + \bar N\bar N_1)\bar r, \tag{9}$$

причем $I(\bar u, \bar v) = 0$.

Доказательство. Приведем функционал (2) при условии (1) к каноническому виду. Для этого, используя M из (4), а затем Ax из (1), получаем:

$$x^*Mx = x^*NBK^{-1}B^*Nx + x^*NBu - x^*Nv + u^*B^*Nx - v^*Nx + \frac{d}{dt}(x^*Nx). \tag{10}$$

В (10) подставляем Nv, найденное из (8), а затем Ax, найденное из (1):

$$x^*Mx = x^*NBK^{-1}B^*Nx + x^*NBu + u^*B^*Nx - u^*B^*r + v^*r -$$

$$- x^*NBK^{-1}B^*r - r^*Bu + r^*v - r^*BK^{-1}B^*Nx + \frac{d}{dt}(x^*r + r^*x - x^*Nx). \tag{11}$$

Учитывая (11), подынтегральное выражение функционала (2) запишем в виде

$$u^*Ku + x^*Mx - v^*Cv = F^*KF - R^*BK^{-1}B^*r + v^*r + r^*v - v^*Cv +$$

$$+ \frac{d}{dt}(x^*r + r^*x - x^*Nx), \tag{12}$$

где $F = u + K^{-1}B^*Nx - K^{-1}B^*r$.

Получая $BK^{-\alpha}B^*$ из (5), а затем $A_1 r$ из (8), имеем

$$r^*BK^{-1}B^*r = r^*N_1NC^{-1}NN_1r + r^*N_1C^{-1}r - r^*N_1Nv + r^*C^{-1}NN_1r -$$

$$- v^*NN_1r + r^*C^{-1}r - \frac{d}{dt}(r^*N_1r). \tag{13}$$

Используя (13), записываем (12) в виде

$$u^*Ku + x^*Mx - v^*Cv = F^*KF - F_1^*CF_1 + \frac{d}{dt}(x^*r + r^*x - x^*Nx + r^*N_1r), \tag{14}$$

где $F_1 = -v + C^{-1}(E + NN_1)\, r$.

Применяя формулу Эйлера для однородных функций [2] $\alpha\varphi(x(t_1)) = x(t_1)\,\mathrm{grad}_x\varphi(x(t_1))$, равенство $x(t_0) = Q^{-1}Sx(t_1)$ и краевые условия задач (4), (5), (7) после несложных преобразований получаем

$$\varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(x^*r + r^*x - x^*Nx + r^*N_1r)\,dt = \left[\frac{1}{2\alpha}\,\mathrm{grad}_x\varphi(x(t_1)) + \right.$$

$$\left. + r^*(t_1) - r^*(t_0)Q^{-1}S\right]x(t_1) + x^*(t_1)\left[\frac{1}{2\alpha}(\mathrm{grad}_x\varphi(x(t_1)))^* - \right.$$

$$\left. - Q^*(T^*)^{-1}r(t_0) + r(t_1)\right] + x^*(t_1)\,[S^*(Q^*)^{-1}N(t_0)Q^{-1}S - N(t_1)]\,x(t_1) +$$

$$+ r^*(t_1)N_1(t_1)r(t_1) - r^*(t_0)N_1(t_0)r(t_0) = 0. \qquad (15)$$

Соотношения (14), (15) позволяют записать функционал (2) в каноническом виде

$$I(u, v) = \int_{t_0}^{t_1} F^*KF\,dt - \int_{t_0}^{t_1} F_1^*CF_1\,dt. \qquad (16)$$

В силу положительной определенности матриц K, C функционал (16) удовлетворяет условию (3) при $F = F_1 = 0$, т. е. соотношение (3) имеет место при $\bar{u}$ и $\bar{v}$, вычисленных по формулам (9). Подставляя (9) в (1), (8) получаем краевые задачи (6), (7) для нахождения $\bar{x}$, $\bar{r}$. Теорема доказана.

Различные прикладные задачи укладываются в рассматриваемую постановку (1)—(3). Например, можно найти оптимальные управления линейной игры преследования аналогичной [1, с. 333]. В приложениях существование и единственность решений краевых задач (4)—(7) устанавливается с помощью известных критериев (см. [3, 4] и приведенную там библиографию). Если известно, что N, N_1 — симметричны, то теорема справедлива без предположения о единственности решения краевых задач (4)—(7). Полученная пара $(\bar{u}, \bar{v})$ вида (9) доставляет, вообще говоря, неединственный минимакс функционалу (2). Используя методику, отличную от предложенной, можно, по-видимому, получить другие (u, v), отличные от (9) и удовлетворяющие седловому свойству (3).

П р и м е р. Рассмотрим скалярный случай задачи (1)—(3)

$$\dot{x} = x + u - v, \quad x(t_1) = x(t_0), \quad t \in [t_0, t_1], \quad I(u, v) = x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} (u^2 - x^2 - v^2)\,dt.$$

Краевые задачи (4) — (7) имеют вид

$$\dot{N} = N^2 - 2N + 1, \quad N(t_1) = N(t_0),$$

$$\dot{N}_1 = N^2N_1 + 2N_1, \quad r^2(t_0)N_1(t_0) = r^2(t_1)N_1(t_1), \quad N_1(t_1) = \nu N_1(t_0), \qquad (17)$$

$$\dot{x} = -(N-1)x - NN_1r, \quad x(t_1) = x(t_0),$$

$$\dot{r} = -(1 + N^2N_1)r, \quad r(t_1) = r(t_0) - 0{,}5.$$

В скалярном случае N, N_1 — симметричны, следовательно, теорема справедлива без предложения о единственности решения краевых задач (17). Легко проверить, что $\bar{N}(t) \equiv 1$, $\bar{N}_1(t) \equiv 0$, $\bar{x}(t) \equiv \mathrm{const} = x^0$, $r(t) = 0{,}5 \times$

$\times [e^{-t_0} - e^{-t_1}]^{-1} e^{-t}$ удовлетворяют (17). Оптимальные управления, вычисленные по формулам (9), имеют вид: $\overline{u}(t) = -x^0 + 0{,}5\,[e^{-t_0} - e^{-t_1}]^{-1} e^{-t}$, $\overline{v}(t) = 0{,}5\,[e^{-t_0} - e^{-t_1}]^{-1} e^{-t}$, причем $I(\overline{u}, \overline{v}) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брайсон А., Хо-Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления.— М.: Мир, 1972.
2. Фиотенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.— М.: Наука, Т. 1, 1969.
3. Лионс Ж.—Л., Madженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М.: Мир, 1971.
4. Лионс Ж.—Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М.: Мир, 1972.

Брестский
педагогический институт

Поступила в редакцию 4. X 1978 г.
после переработки 17.II 1979.