УДК 517.948.3

О. Ф. Герус

Об одном особом интегральном уравнении и краевой задаче Римана

Цель данной статьи — расширить класс кривых, на которых при соответствующих граничных условиях разрешима краевая задача Римана, а затем воспользоваться этим для решения особого интегрального уравнения вида (10). Решения получены на основании результатов работы [1] о структурных свойствах интегралов типа Коши, примененных по обычной схеме (см., например, [2]).

Рассмотрим следующую задачу.

Задача Римана. *Пусть $G(t)$, $g(t)$ — непрерывные функции, заданные на замкнутой жордановой спрямляемой кривой Γ (причем $G(t) \neq 0$ $\forall t \in \Gamma$), D^+ и D^- — соответственно внутренняя и внешняя области, ограниченные кривой Γ. Требуется найти функцию $\Phi^+(z)$, аналитическую в D^+ и непрерывную в $\overline{D}^+$, и функцию $\Phi^-(z)$, аналитическую в D^- (включая точку $z = \infty$) и непрерывную в $\overline{D}^-$, удовлетворяющие следующему граничному условию:*

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t) \quad (\forall t \in \Gamma). \tag{1}$$

В монографиях [2, 3] приведено решение сформулированной задачи в случае, когда кривая Γ — гладкая, или кусочно-гладкая, а функции $G(t)$, $g(t)$ удовлетворяют условию Гельдера.

Пусть $\Gamma_{t,\delta} = \Gamma \cap \{\zeta : |\zeta - t| \leqslant \delta\}$; $\omega_{1,\Gamma}(G, \delta) = \sup\limits_{t \in \Gamma} \sup\limits_{t_1, t_2 \in \Gamma_{t,\delta}} |G(t_1) - G(t_2)|$ $(\forall \delta > 0)$ — модуль непрерывности функции $G(t)$ на Γ; $\overset{*}{\omega}_{1,\Gamma}(G, \delta) = \delta \sup\limits_{t \geqslant \delta} \dfrac{\omega_{1,\Gamma}(G, t)}{t}$ — регуляризованный модуль непрерывности.

Из результатов многографии [4] о структурных свойствах интегралов типа Коши следует разрешимость краевой задачи Римана в случае $\Gamma \in S_\lambda$ (класс S_λ ссстоит из кривых, у которых отношение длины не большей из дуг к длине стягивающей их хорды равномерно ограничено), при условиях

$$\int_0^d \frac{\omega_{1,\Gamma}(G, x)}{x} \ln \frac{2d}{x}\, dx < +\infty, \tag{2}$$

$$\int_0^d \frac{\omega_{1,\Gamma}(g, x)}{x}\, dx < +\infty, \tag{3}$$

где d — диаметр кривой Γ.

В работе [5] показано, что если в условии (2) вместо настоящего модуля непрерывности поставить регуляризованный, то на некотором подклассе кривых класса S_λ условие (3) можно ослабить. В той же работе этот результат использован для решения характеристического особого интегрального уравнения (вида (17), см. ниже) на указанных кривых.

Нам понадобятся метрические характеристики $\theta_z(\delta)$, $\theta(\delta)$ спрямляемой кривой Γ, введенные в [6] следующим образом: $\theta_z(\delta) = \operatorname{mes} \Gamma_{z,\delta}$, $\theta(\delta) = \sup\limits_{z \in \Gamma} \theta_z(\delta)$ $\forall \delta \in (0, d]$.

В работе [7] решена задача о скачке (частный случай задачи Римана, когда $G(t) \equiv 1$) при условии

$$\int_0^d \frac{\overset{*}{\omega}_{1,\Gamma}(g, x)}{x}\, d\theta(x) < +\infty. \tag{4}$$

Пусть $\varkappa = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma d \ln G(t)$ — индекс задачи, а $X(z)$ — каноническая функция, определяемая формулами

$$X^+(z) = e^{\Lambda^+(z)} \quad (\forall z \in \overline{D}^+), \quad X^-(z) = z^{-\varkappa} e^{\Lambda^-(z)} \quad (\forall z \in \overline{D}^-),$$

где $\Lambda^+(z)$, $\Lambda^-(z)$ — непрерывные продолжения соответственно на $\overline{D}^+$ и $\overline{D}^-$ интеграла типа Коши

$$\Lambda(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\ln[\zeta^{-\varkappa} G(\zeta)]}{\zeta - z}\, d\zeta \quad (z \overline{\in} \Gamma).$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$\int_0^d \int_0^d \frac{\theta(x)\,\theta(y)\,\omega_{1,\Gamma}(G, x)}{x^2 y (x+y)}\, dx dy < +\infty, \tag{5}$$

$$\int_0^d \frac{\theta(x)\,\omega_{1,\Gamma}(g, x)}{x^2}\, dx < +\infty. \tag{6}$$

Тогда при дополнительном ограничении $\Phi^-(\infty) = 0$ в случае $\varkappa \geqslant 0$ задача Римана разрешима и ее общее решение имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{X^+(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + P_{\varkappa-1}(z)\, X(z), \tag{7}$$

где $P_{\varkappa-1}(z)$ — полином степени $\varkappa - 1$ с произвольными комплексными коэффициентами (при $\varkappa = 0$ нужно положить $P_{\varkappa-1}(z) \equiv 0$), а в случае $\varkappa < 0$ для разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы функция $g(t)$ удовлетворяла $|\varkappa|$ условиям

$$\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{X^+(\zeta)} \zeta^{k-1}\, d\zeta = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, -\varkappa), \tag{8}$$

при выполнении которых единственное решение задачи дается формулой

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{X^{+}(\xi)}\frac{d\zeta}{\zeta-z}. \tag{9}$$

В случае $\theta(\delta)=O(\delta)$, условия (5), (6) совпадают соответственно с условиями (2), (3), которые таким образом обеспечивают разрешимость краевой задачи Римана на кривых более широкого класса, чем S_λ.

Рассмотрим особое интегральное уравнение

$$[a(t)+b(t)]\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau=f(t), \tag{10}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ — непрерывные функции, заданные на замкнутой жордановой спрямляемой кривой Γ, причем $a^2(t)-b^2(t)\neq 0\ \ \forall t\in\Gamma$.

Пусть $\varkappa=\operatorname{Ind}\dfrac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}$ — индекс особого интегрального уравнения (10).

На основании теоремы 1 доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*

$$\int_0^d\int_0^d\int_0^d\frac{\theta(x)\theta(y)\theta(z)\omega_{1,\Gamma}(a,x)}{x^2yz(x+y)(y+z)}dxdydz<+\infty, \tag{11}$$

$$\int_0^d\int_0^d\int_0^d\frac{\theta(x)\theta(y)\theta(z)\omega_{1,\Gamma}(b,x)}{x^2yz(x+y)(y+z)}dxdydz<+\infty, \tag{12}$$

$$\int_0^d\int_0^d\frac{\theta(x)\theta(y)\omega_{1,\Gamma}(f,x)}{x^2y(x+y)}dxdy<+\infty. \tag{13}$$

Тогда а) если $\varkappa\geqslant 0$, то уравнение (10) разрешимо и его общее решение имеет вид

$$\varphi(t)=\frac{f(t)}{a(t)+b(t)}-\frac{b(t)Z(t)}{[a^2(t)-b^2(t)]\pi i}\int_{\Gamma}\left[\frac{f(\zeta)}{Z(\zeta)}-\frac{f(t)}{Z(t)}\right]\frac{d\zeta}{\zeta-t}+\frac{b(t)Z(t)}{a^2(t)-b^2(t)}P_{\varkappa-1}(t), \tag{14}$$

где

$$Z(t)=\frac{a(t)-b(t)}{t^{\varkappa}}e^{\Lambda^{-}(t)},$$

$$\Lambda^{-}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\ln\frac{t^{\varkappa}[a(\zeta)-b(\zeta)][a(t)+b(t)]}{\zeta^{\varkappa}[a(\zeta)+b(\zeta)][a(t)-b(t)]}\frac{d\zeta}{\zeta-t};$$

б) если $\varkappa<0$, то для разрешимости уравнения (10) *необходимо и достаточно выполнение $|\varkappa|$ условий*

$$\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{Z(\zeta)}\zeta^{k-1}d\zeta=0\quad(k=1,2,\dots,-\varkappa), \tag{15}$$

и в этом случае решение дается формулой (14), если в ней положить $P_{\varkappa-1}(t)\equiv 0$.

Следует отметить, что при условиях теоремы 2 решение (14) уравнения (10) оказывается непрерывным.

Уравнения, эквивалентные особому интегральному уравнению (10) в различных предположениях относительно кривой Γ и функций $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ решались в работах [8—10]. В частности, в работе [10] получено решение такого уравнения для случая, когда Γ — конечная совокупность не пересекающихся замкнутых кривых класса S_λ, расположенных определенным образом, а функции $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ удовлетворяют условию Гельдера.

Если кривая Γ удовлетворяет условию

$$\int_\Gamma \frac{d\tau}{\tau - t} = \pi i \quad (\forall t \in \Gamma), \tag{16}$$

то уравнение (10) совпадает с характеристическим особым интегральным уравнением

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = f(t), \tag{17}$$

непрерывное решение которого для гладких кривых приведено в монографиях [2, 3], а для кривых, удовлетворяющих условию (16) — в работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Герус О. Ф. Некоторые оценки модулей гладкости интегралов типа Коши.— Укр. мат. журн., 1978, **30**, № 5, с. 594—601.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М.: Наука, 1977.— 640 с.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.— 512 с.
4. Тамразов П. М. Гладкости и полиномиальные приближения.— Киев: Наук. думка, 1975.— 272 с.
5. Исса Р. Б. Об интеграле типа Коши с непрерывной плотностью и его приложении к краевой задаче Римана: — Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Баку, 1978.— 95 с.
6. Салаев В. В. Прямые и обратные оценки для особого интеграла Коши по замкнутой кривой.— Мат. заметки, 1976, **19**, № 3, с. 365—380.
7. Рахимов Р. М. Интеграл типа Коши по границе объединения областей и задача о скачке.— Докл. Тадж. ССР, 1979, **22**, № 4, с. 219—223.
8. Купрадзе В. Д. Некоторые новые замечания к теории сингулярных интегральных уравнений.— Тр. Тбилисск. ун-та, 1951, **42**, с. 1—23.
9. Квеселава Д. А. Граничная задача Гильберта и сингулярные интегральные уравнения в случае пересекающихся контуров.— Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГССР, 1949, **17**, с. 1—27.
10. Гегелия Т. Г. О некоторых сингулярных интегральных уравнениях частного вида.— Сообщ. АН ГССР, 1952, **13**, № 10, с. 581—586.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
18.IX 1971 г.