УДК 518:517.948

С. Н. Зализняк, Ю. И. Мельник, Ю. К. Подлипенко

О приближенном решении интегральных уравнений теории потенциала

В области G, граница которой задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [0, 2\pi]\ (\varphi(0) = \varphi(2\pi),\ \psi(0) = \psi(2\pi)), \tag{1}$$

рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad u \mid \partial G = f \quad (f \in C(\partial G)). \tag{2}$$

Известно, что при некоторых предположениях о гладкости границы решение задачи (2) можно искать в виде потенциала двойного слоя

$$u(M) = \int_{\partial G} \frac{\cos(n_N^{\frown}, MN)}{r_{MN}} \mu(N)\, ds_N, \tag{3}$$

где $\mu(N)$ — неизвестная плотность, $r^{\frown}_{MN}$— расстояния между переменной точкой N границы ∂G и точкой $M \in G$; $(n_N,\ MN)$ — угол между внешней нормалью в точке N и направлением из фиксированной точки M к переменной точки N. При этом функция $\mu(N)$ определяется из следующего интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода:

$$\pi\mu(P) + \int_{\partial G} \frac{\cos(n_P^{\frown}, PN)}{r_{PN}} \mu(N)\, ds_N = f(P) \quad (P, N \in \partial G). \tag{4}$$

В настоящей работе изучается гладкость решений интегрального уравнения (4) в зависимости от гладкости границы ∂G. Исследуется порядок приближения решения уравнения (4) решениями интегральных уравнений с вырожденными ядрами, полученными применением линейных полиномиальных операторов к ядру уравнения (4). Доказанные теоремы опираются на результаты работ [1, 2].

1. О гладкости решений интегральных уравнений. Пусть граница ∂G области G задана посредством параметрических уравнений (1), в которых $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемые и периодические с периодом 2π функции. Будем также считать, что при возрастании параметра t (т. е. при обходе границы в положительном направлении) область G все время остается слева и $\forall t$ выполняется условие

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 > 0, \tag{5}$$

которое означает, что в каждой точке контура ∂G существует непрерывная касательная. Обозначая значение t, отвечающее точкам P и N соответственно через ξ и η, $\mu(P)$, $\mu(N)$ и $f(P)$ — через $\mu(\xi)$, $\mu(\eta)$ и $f(\xi)$, перепишем уравнение (4) в виде

$$\mu(\xi) = \frac{1}{\pi} f(\xi) + \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \frac{\varphi'(\eta)[\psi(\eta) - \psi(\xi)] - \psi'(\eta)[\varphi(\eta) - \varphi(\xi)]}{[\varphi(\eta) - \varphi(\xi)]^2 + [\psi(\eta) - \psi(\xi)]^2} \mu(\eta)\, d\eta. \tag{6}$$

Если потребовать [3, с. 598], чтобы $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ были дважды непрерывно дифференцируемыми функциями параметра t (или, что то же самое, чтобы граница области G имела непрерывную кривизну), то ядро

$$K(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \frac{\varphi'(\eta)[\psi(\eta) - \psi(\xi)] - \psi'(\eta)[\varphi(\eta) - \varphi(\xi)]}{[\varphi(\eta) - \varphi(\xi)]^2 + [\psi(\eta) - \psi(\xi)]^2} \tag{7}$$

интегрального уравнения (6) и, следовательно, решения $\mu(\xi)$ будут непрерывными. При этом устанавливается, что

$$\lim_{\eta \to \xi} K(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \frac{\varphi''(\xi)\ \psi'(\xi) - \psi''(\xi)\ \varphi'(\xi)}{[\varphi'(\xi)]^2 + [\psi'(\xi)]^2}.$$

Требование большей гладкости функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $f(t)$ повлечет за собой большую гладкость ядра $K(\xi, \eta)$ и значит, плотности $\mu(\xi)$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и функция $f(t)$ соответственно $n + 2$ и n $(n \geqslant 0)$ раз непрерывно дифференцируемы. Тогда плотность $\mu(\xi)$, являющаяся решением уравнения (6), будет n раз непрерывно дифференцируема.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко видеть, что (в силу (6)) для доказательства достаточно убедиться в непрерывной дифференцируемости ядра $K(\xi, \eta)$ по переменной ξ n раз.

Представим ядро в виде $K(\xi, \eta) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{w(\xi, \eta)}{v(\xi, \eta)}$, где

$$w(\xi, \eta) = \frac{\varphi'(\eta)\,[\psi(\eta) - \psi(\xi)] - \psi'(\eta)\,[\varphi(\eta) - \varphi(\xi)]}{(\eta - \xi)^2},$$

$$v(\xi, \eta) = \frac{[\varphi(\eta) - \varphi(\xi)]^2 + [\psi(\eta) - \psi(\xi)]^2}{(\eta - \xi)^2}.$$

Докажем, что $v(\xi, \eta) \neq 0$ при всех ξ, η. При $\eta \neq \xi$ это очевидно. Пусть $\eta \to \xi$. Используя соотношения $\varphi(\eta) - \varphi(\xi) = \varphi'(\xi)(\eta - \xi) + o(\eta - \xi), \psi(\eta) - \psi(\xi) = \psi'(\xi)(\eta - \xi) + o(\eta - \xi)$, имеем

$$v(\xi, \eta) = \frac{\{\varphi'(\xi)(\eta - \xi) + o(\eta - \xi)\}^2 + \{\psi'(\xi)(\eta - \xi) + o(\eta - \xi)\}^2}{(\eta - \xi)^2} =$$

$$= \frac{[\varphi'(\xi)]^2(\eta - \xi)^2 + [\psi'(\xi)]^2(\eta - \xi)^2 + o[(\eta - \xi)^2]}{(\eta - \xi)^2} = [\varphi'(\xi)]^2 +$$

$$+ [\psi'(\xi)]^2 + o(1).$$

Отсюда в силу условия (5) следует требуемый результат.
Используя этот факт и формулу [4 с. 49]

$$\frac{\partial^n K(\xi, \eta)}{\partial \xi^n} = \frac{1}{\pi} \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \left(\frac{w(\xi, \eta)}{v(\xi, \eta)} \right) = \frac{(-1)^n}{\pi v^{n+1}(\xi, \eta)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} w(\xi, \eta) & v(\xi, \eta) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ w'_{\xi}(\xi, \eta) & v'_{\xi}(\xi, \eta) & v(\xi, \eta) & 0 & \dots & 0 \\ w''_{\xi^2}(\xi, \eta) & v''_{\xi^2}(\xi, \eta) & 2v'_{\xi}(\xi, \eta) & v(\xi, \eta) & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \dots & \cdots \\ w^{(n-1)}_{\xi^{n-1}}(\xi, \eta) & v^{(n-1)}_{\xi^{n-1}}(\xi, \eta) & \binom{n-1}{1} v^{(n-2)}_{\xi^{n-2}}(\xi, \eta) & \binom{n-1}{2} v^{(n-3)}_{\xi^{n-3}}(\xi, \eta) & \dots & v(\xi, \eta) \\ w^{(n-1)}_{\xi^{n-1}}(\xi, \eta) & v^{(n)}_{\xi^n}(\xi, \eta) & \binom{n}{1} v^{(n)}_{\xi^n}(\xi, \eta) & \binom{n}{2} v^{(n-2)}_{\xi^{n-2}}(\xi, \eta) & \dots & \binom{n}{n-1} v'_{\xi}(\xi, \eta) \end{vmatrix},$$

верную в любой точке (ξ, η), в которой $v(\xi, \eta) \neq 0$, для справедливости теоремы достаточно доказать, что существуют и непрерывны все промежуточные производные по ξ функций $w(\xi, \eta)$ и $v(\xi, \eta)$.

Докажем существование всех промежуточных производных функции $w(\xi, \eta)$ (для функции $v(\xi, \eta)$ рассуждения аналогичны). Положим $\tilde{w}(\xi, \eta) = w(\xi, \eta)(\eta - \xi)^2$. Легко видеть, что

$$\tilde{w}(\xi, \eta) = \tilde{w}(\eta, \eta) + \left. \frac{\partial \tilde{w}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right|_{\xi=\eta} (\xi - \eta) + \int_{\eta}^{\xi} \frac{\partial^2 \tilde{w}(t, \eta)}{\partial t^2} (\xi - t)\, dt. \quad (8)$$

Так как $\tilde{w}(\eta, \eta) = 0$ и $\left. \dfrac{\partial \tilde{w}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right|_{\xi=\eta} = -\varphi'(\eta)\psi'(\xi)|_{\xi=\eta} + \psi'(\eta)\varphi'(\xi)|_{\xi=\eta} = 0,$

то

$$\tilde{w}(\xi, \eta) = \int\limits_{\eta}^{\xi} \frac{\partial^2 \tilde{w}(t, \eta)}{\partial t^2} (\xi - t)\, dt = (\xi - \eta)^2 \int\limits_{1}^{0} \frac{\partial^2 \tilde{w}(t, \eta)}{\partial t^2}\Big|_{t=(\xi-\eta)x+\eta} (1 - x)\, dx.$$

Отсюда

$$w(\xi, \eta) = \frac{\tilde{w}(\xi, \eta)}{(\xi - \eta)^2} = \int\limits_{0}^{1} \frac{\partial^2 \tilde{w}(t, \eta)}{\partial t^2}\Big|_{t=(\xi-\eta)x+\eta} (1 - x)\, dx. \tag{9}$$

Поскольку $\tilde{w}(\xi, \eta)$ $n + 2$ раза непрерывно дифференцируема по ξ (см. определение $\tilde{w}(\xi, \eta)$), то из равенства (9) заключаем, что $w(\xi, \eta)$ непрерывно дифференцируема по ξ n раз. Этим теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $f(t)$ — аналитические функции. Тогда плотность $\mu(\xi)$, являющаяся решением уравнения* (6), *также будет аналитической функцией.*

Доказательство. В силу (6) достаточно доказать [5, с. 79] что ядро $K(\xi, \eta)$ — аналитическая функция двух переменных. Для этого на основании теоремы Хартогса [6, с. 280] достаточно установить аналитичность этой функции по каждой переменной. Докажем, что $K(\xi, \eta)$ — аналитична по η (аналитичность по ξ устанавливается аналогично). Пусть ξ фиксировано. Тогда, разлагая числитель и знаменатель формулы (7) по степеням $(\eta - \xi)$, после несложных преобразований получаем $K(\xi, \eta) = 1/\pi \times$

$$\times (1/2\,[\varphi''(\xi)\,\psi'(\xi) - \varphi'(\xi)\,\psi''(\xi)] + \frac{1}{3}\,[\varphi^{(3)}(\xi)\,\psi'(\xi) - \varphi'(\xi)\,\psi^{(3)}(\xi)]\,(\eta - \xi) + \ldots)/$$

$$/\,([\varphi'(\xi)]^2 + [\psi'(\xi)]^2 + [\varphi'(\xi)\,\varphi''(\xi) + \psi'(\xi)\,\psi''(\xi)]\,(\eta - \xi) + \ldots),$$

где точками обозначены слагаемые более высокого порядка малости относительно $\eta - \xi$. Откуда в силу условия (5) следует требуемое. Этим доказательство теоремы завершено.

2. О порядке полиномиальной аппроксимации решения интегрального уравнения (6). Возьмем какой-нибудь линейный полиномиальный метод U_n приближения непрерывных периодических функций $f(x)$ вида

$$U_n(f; x) = \frac{1}{2}\,\Phi_0^{(n)}(f) + \sum_{k=1}^{n} [\Phi_k^{(n)}(f) \cos kx + \Psi_k^{(n)}(f) \sin kx], \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\Phi_k^{(n)}(f)$ и $\Psi_k^{(n)}(f)$ — некоторые линейные функционалы, и поставим в соответствие уравнению (6) уравнение с вырожденным ядром вида

$$\mu_n(\xi) = \frac{1}{\pi}\,U_n(f; \xi) +$$

$$+ \int\limits_{0}^{2\pi} U_n \left\{ \frac{1}{\pi}\; \frac{\varphi'(y)\,[\psi(y) - \psi(\xi)] - \psi'(y)\,[\varphi(y) - \varphi(\xi)]}{[\varphi(y) - \varphi(\xi)]^2 + [\psi(y) - \psi(\xi)]^2}\,;\; \eta \right\} \mu_n(\eta)\, d\eta. \tag{10}$$

При этом оператор U_n, стоящий под знаком интеграла, действует на ядро уравнения (6) как на функцию от y, в то время как переменная ξ играет роль параметра.

В теории потенциала доказывается (см. [3, с. 631]), что единица не является собственным числом ядра $K(x, y)$, определяемого по формуле (7).

В наших предположениях относительно функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, оператор

$$(K\mu)(x) = \int_0^{2\pi} K(x, y)\, \mu(y)\, dy$$

будет вполне непрерывным, а ядро $K(x, y)$ удовлетворяет условиям А) работы [1] (это сразу следует из непрерывности $K(x, y)$). Таким образом мы находимся в условиях применимости теоремы 3.1 работы [2], которую в этой ситуации можно сформулировать следующим образом.

Теорема А. *Каков бы ни был линейный полиномиальный оператор U_n, уравнения* (10) *при всех n, начиная с некоторого, однозначно разрешимы; полиномы $\mu_n(x)$, являющиеся решениями этих уравнений, равномерно сходятся к решению исходного уравнения* (6) *со скоростью*

$$\| \mu(x) - \mu_n(x) \| \leqslant (1 + \alpha_n) \| \mu(x) - U_n(\mu; x) \|; \tag{11}$$

α_n определяется по формуле

$$\alpha_n = \frac{\delta(K;\, U_n) + \dfrac{\varepsilon(K;\, U_n;\, \mu)}{\| \mu(x) - U_n(\mu;\, x) \|}}{1 - \delta(K;\, U_n)\, R} \tag{12}$$

где

$$\delta(K;\, U_n) \overset{df}{=} \max_x \int_0^{2\pi} | K(x, y) - U_n(K(\xi, y);\, x) |\, dy;$$

$$\varepsilon(K;\, U_n;\, \mu) \overset{df}{=} \max_x \left| \int_0^{2\pi} K(x, y)\, [\mu(y) - U_n(\mu;\, y)]\, dy \right|;$$

$$R = 1 + \max_x \int_0^{2\pi} | R(x, y) |\, dy;$$

$R(x, y)$ — резольвента ядра $K(x, y)$.

Теорема A с учетом теорем 1 и 2 позволяет с помощью известных результатов теории приближения функций установить простые достаточные условия сходимости и оценку погрешности полиномиальной аппроксимации неизвестной плотности $\mu(x)$. Для этого (как следует из (11) и (12)) нужно иметь эффективные оценки скорости стремления к нулю величин δ (K; U_n), ε (K; U_n; μ), $\| \mu(x) - U_n(\mu; x) \|$. Целый ряд таких оценок для широкого класса линейных методов U_n получен в работах [1, 2], из которых, в частности, следует, что $\alpha_n = o(1)$, $(n \to \infty)$.

Для важного класса проекционных линейных полиномиальных операторов (т. е. таких, что $U_n^2 = U_n$) имеют место следующие результаты.

Теорема 3. *Если $\varphi(t), \psi(t) \in C^{r+2}$, а $f(t) \in C^{(r)}$, то каков бы ни был проекционный полиномиальный оператор U_n, полиномы $\mu_n(x)$, являющиеся решениями уравнений* (10), *равномерно сходятся к решению $\mu(x)$ уравнения* (6) *со скоростью*

$$\| \mu(x) - \mu_n(x) \| \leqslant (1 + \alpha_n)(1 + \| U_n \|) \frac{K_r}{(n+1)^r}\, \omega\left(\mu^{(r)};\, \frac{\pi}{n+1}\right), \tag{13}$$

где K_r — константа Фавара $(1 \leqslant K_r \leqslant \pi/2,\ r = 1, 2, \ldots)$, $\| U_n \|$ — норма оператора U_n, $\omega(\mu^{(r)}; t)$ — модуль непрерывности функции $\mu^{(r)}(x)$, α_n определяется по формуле (12).

Доказательство. Применяя теорему A и неравенство Лебега, получаем

$$\| \mu(x) - \mu_n(x) \| \leqslant (1 + \alpha_n) \| \mu(x) - U_n(\mu;\, x) \| \leqslant (1 + \alpha_n)(1 + \| U_n \|)\, E_n(\mu),$$

где $E_n(\mu)$ — наилучшее приближение функции $\mu(x)$ посредством тригонометрических полиномов порядка n в C. Далее, учитывая, что в силу теоремы 1 $\mu(x) \in C^{(r)}$ и воспользовавшись второй теоремой Джексона [7 с. 231] приходим к (13). Теорема доказана.

Повторяя рассуждения, используемые при доказательстве теоремы 3 (с заменой теоремы Джексона на теорему Бернштейна [8 с. 223], придем к следующему результату.

Теорема 4. *Если $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $f(t)$ — функции, аналитические на отрезке* $[0, 2\pi]$, *то каков бы ни был проекционный полиномиальный оператор* U_n, *полиномы* $\mu_n(x)$, *являющиеся решениями уравнений* (10), *равномерно сходятся к решению* $\mu(x)$ *уравнения* (6) *со скоростью*

$$\| \mu(x) - \mu_n(x) \| \leqslant K(1+\alpha_n)(1+\|U_n\|)\, q^n,$$

где K и $0 < q < 1$ — некоторые постоянные, зависящие только от области G, $\alpha_n = o(1)$ $(n \to \infty)$, определяется по формуле (12).

Замечание 1. Приближенное аналитическое представление для решения $u(x, y)$ задачи (2), согласно (3), получим в виде

$$u_n(x, y) = \int_0^{2\pi} \mu_n(\eta) \frac{\psi'(\eta)[\varphi(\eta) - x] - \varphi'(\eta)[\psi(\eta) - y)]}{[x - \varphi(\eta)]^2 + [y - \psi(\eta)]^2}\, d\eta \quad (x, y) \in G.$$

Из теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *В условиях теоремы 3 имеет место оценка*

$$|u(x, y) - u_n(x, y)| \leqslant A_{\partial G}(1+\alpha_n)(1+\|U_n\|) \frac{K_r}{(n+1)^r}\, \omega\left(\mu^{(r)};\ \frac{\pi}{n+1}\right)$$
$$\forall (x, y) \in G, \tag{14}$$

где $A_{\partial G}$ — константа, зависящая только от контура ∂G.

Действительно, приняв во внимание, что для линий класса Ляпунова справедливо неравенство (см. [3])

$$\int_{\partial G} \frac{|\cos(\widehat{n_N, r_{MN}})|}{r_{MN}}\, ds_N \leqslant A_{\partial G} \quad \forall M \in R^2, \quad A_{\partial G} = \text{const},$$

находим

$$|u(x, y) - u_n(x, y)| =$$
$$= \left| \int_0^{2\pi} [\mu(\eta) - \mu_n(\eta)] \frac{\psi'(\eta)[\varphi(\eta) - x] - \varphi'(\eta)[\psi(\eta) - y]}{[x - \varphi(\eta)]^2 + [y - \psi(\eta)]^2}\, d\eta \right| \leqslant$$
$$\leqslant \| \mu(\eta) - \mu_n(\eta) \| \int_{\partial G} \frac{|\cos(\widehat{n_N, r_{MN}})|}{r_{MN}}\, ds_N,$$

откуда следует справедливость оценки (14).

Следствие 2. *В условиях теоремы 4 имеет место оценка* $|u(x, y) - u_n(x, y)| \leqslant A_{\partial G}\, K(1+\alpha_n)(1+\|U_n\|)\, q^n$ $\forall (x, y) \in G$.

Отметим, что если область G выпуклая, то константу $A_{\partial G}$ можно заменить на 4π.

Замечание 2. Эффективные оценки норм $\|U_n\|$ имеются в монографии [9].

Замечание 3. Аналогично можно рассмотреть задачу Неймана для уравнения Лапласа, а также краевые задачи в многосвязных областях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дзядык В. К. О применении линейных методов к приближению полиномами функций, которые являются решениями интегральных уравнений Фредгольма второго рода.— Укр. мат. журн., 1970, **22**, № 4, с. 448—467.
2. Дзядык В. К. О применении линейных методов к приближению полиномами функций, которые являются решениями интегральных уравнений Фредгольма второго рода.— Укр. мат. журн., 1970, **22**, № 5, с. 567—578.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики.— М.: Гостехиздат, 1953, т. 4.— 804 с.
4. Бурбаки Н. Функции действительного переменного.— М.: Наука, 1965.— 424 с.
5. Евграфов М. А. Аналитические функции.— М.: Наука, 1968.— 471 с.
6. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ.— М.: Наука, 1969.— 576 с.
7. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближений.— М.: Наука, 1976.— 320 с.
8. Натансон И. П. Конструктивная теория функций.— М.—Л.: Гостехиздат. 1949.— 688 с.
9. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М.: Наука. 1977.— 508 с.

Киевский
политехнический институт

Поступила в редакцию
5.X 1979 г.