УДК 519.4/46

Л. А. Курдаченко, Н. Ф. Кузенный, В. В. Пылаев

Бесконечные группы с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп

Пусть $\mathfrak{C}$ — некоторая система подгрупп группы G. Систему $\mathfrak{C}$ назовем обобщенно плотной в G, если для любых двух различных подгрупп $A \subset B$ из того, что подгруппа A не максимальна в B, вытекает существование в системе $\mathfrak{C}$ подгруппы C, расположенной между A и B, т. е. $A \subseteq C \subseteq B$. Более узкие определения обобщенно плотных систем подгрупп рассматривались в работах [1—3]. В работе [4] изучены конечные группы с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп. В настоящей статье рассматриваются бесконечные группы с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп. Легко видеть, что бесконечная группа, всякая собственная подгруппа которой имеет простой порядок (группа Тарского [1]), будет группой с обобщенно плотной системой подгрупп для любой системы $\mathfrak{C}$. Поэтому при изучении групп с обобщенно плотными системами подгрупп целесообразно ограничиться рассмотрением тех классов групп, которые не содержат групп Тарского.

Одним из таких является класс локально-ступенчатых групп. Группа G называется локально-ступенчатой, если всякая ее конечнопорожденная подгруппа обладает собственной подгруппой конечного индекса. В этом классе проведем изучение групп с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп.

Обозначим — $\mathfrak{K}$ класс бесконечных групп с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп. Взяв в качестве обобщенно плотной системы $\mathfrak{C}$ систему тех субнормальных подгрупп, индексы субнормальности которых ограничены некоторым натуральным числом c, получим некоторый подкласс класса $\mathfrak{K}$. Обозначим его через $\mathfrak{K}_c$.

Лемма 1. *Все подгруппы и фактор-группы группы G с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп также являются группами с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп.*

Лемма 2. *Пусть $G \in \mathfrak{K}$, g — элемент бесконечного порядка группы G. Тогда подгруппа (g) субнормальна в G.*

Доказательство. Пусть p и q — различные простые числа, $g_1 = g^{p^2}$, $g_2 = g^{q^2}$. Ни одна из подгрупп (g_i) не максимальна в (g), $i = 1, 2$, поэтому найдутся такие числа k, l, что $(g^{p^k}) \lhd\lhd G$, $(g^{q^l}) \lhd\lhd G$, причем $0 \leqslant k, l \leqslant 2$. Из взаимной простоты чисел p^k и q^l получаем равенство $(g) = (g^{p^k})(g^{q^l})$, а так как произведение двух перестановочных субнормальных подгрупп — субнормальная подгруппа [5, следствие леммы 3.15], то подгруппа (g) субнормальна. Лемма доказана.

Множество всех субнормальных циклических подгрупп группы G порождает характеристическую подгруппу, причем каждая конечно-порожденная подгруппа из нее субнормальна во всей группе G. Эту подгруппу называют радикалом Бэра [5, 4.1]. Радикал Бэра группы G обозначим $B(G)$. Если $B(G) = G$, то группу G назовем группой Бэра.

Следствие 1. *Пусть $G \in \mathfrak{K}$. Если группа G содержит неединичные элементы бесконечного порядка, то ее радикал Бэра неединичен.*

Следствие 2. *Пусть $G \in \mathfrak{K}$. Тогда фактор-группа $G/B(G)$ — периодическая.*

Лемма 3. *Периодические подгруппы локально-ступенчатой группы G с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп являются либо конечными разрешимыми группами, либо бесконечными локально-нильпотентными группами с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп.*

Доказательство. Пусть G — исследуемая группа, T — ее произвольная периодическая подгруппа и H — конечнопорожденная подгруппа из T. По лемме 1 в группах T и H все их подгруппы и фактор-группы являются группами с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп. Покажем, что H — конечная группа. Предположим противное. Ввиду локально ступенчатости группы G и конечнопорожденности H в подгруппе H можно построить инвариантный бесконечный ряд конечнопорожденных подгрупп $H = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_i \supset \ldots$ с конечными факторами H_i/H_{i+1} и, значит, H/H_{i+1} — конечен для всех $i = 1, 2, \ldots$ Пусть $N = \bigcap_{i=1,2,\ldots} H_i$; тогда N — инвариантная в H подгруппа с бесконечной фактор-группой H/N. В силу теоремы Ремака (см., например, [6]) фактор-группа H/N изоморфна некоторой периодической подгруппе $\overline{H}_1$ полного прямого произведения $\overline{G}_1 = \prod_{i \in I} H/H_{i+1}$. Так как H/H_{i+1} — конечная группа, то по леммам 1, 2 она разрешима. Из этого следует, что G_1, а вместе с ней и $\overline{H}_1$, являются RI^*-группами. Известно [7], что периодические RI^*-группы — локально конечны и, значит, $\overline{H}_1$ также локально конечная группа. Так как H — конечнопорожденная, то таковы и фактор-группа H/N и подгруппа $\overline{H}_1$. Отсюда, подгруппы $\overline{H}_1$ и H/N — конечны. Получили противоречие с бесконечностью фактор-группы H/N. Следовательно, подгруппа H не обладает отмеченным бесконечным рядом и, значит, подгруппа H — конечна.

Отсюда следует, что T — локально конечная группа. Если T — конечна, то утверждение леммы вытекает из основной теоремы работы [4].

Пусть T — бесконечная группа. Для доказательства леммы достаточно показать, что все силовские подгруппы из T инвариантны.

Предположим противное. Тогда T обладает конечными ненильпотентными подгруппами. Из представления групп такого рода (см. основную теорему из [4]) группу T также можно представить в виде $T = A \leftthreetimes B$, где A — конечная нильпотентная подгруппа, а B — бесконечная локальнонильпотентная группа, ранг которой не превышает двух. В силу строения периодических локальнонильпотентных групп конечного ранга подгруппа B — группа Черникова с единственной квазициклической подгруппой K. Ясно, что $C_G(A) \supseteq K$. Нетрудно установить, что в этом случае и вся $B \subseteq C_G(A)$. Получили противоречие с предположением. Отсюда все силовские подгруппы из T инвариантны, а T — локальнонильпотентная группа. Лемма доказана.

Лемма 4. *Всякая примарная циклическая подгруппа локальноступенчатой группы G с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп — субнормальна в G.*

Доказательство. Пусть G — исследуемая группа и A — ее примарная циклическая подгруппа. Нетрудно показать, что если A содержится в бесконечной периодической подгруппе группы G, то она субнормальна в G. Из этого следует, что всякая периодическая подгруппа группы G, содержащая A — конечна и, значит, существует максимальная периодическая подгруппа T, содержащая A и являющаяся конечной. Так как периодические группы с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп по лемме 3 локальнонильпотентны, то они не содержат конечных максимальных подгрупп. Отсюда, G — смешанная группа. В силу следствия 1 $B(G)$ — нетривиальная локально нильпотентная инвариантная подгруппа группы G, содержащая все элементы бесконечного порядка. Пусть x — один из таких элементов. Тогда в подгруппе $H = (x, T)$ подгруппа $H_1 = B(G) \cap H$ является конечнопорожденной и, значит, нильпотентной инвариантной подгруппой, содержащей элементы бесконечного порядка. В силу конечности периодических подгрупп из H и, следовательно, из H_1, а также нильпотентности подгруппы H_1, центр подгруппы H_1 содержит бесконечную характеристическую в H_1 абелевую подгруппу A без кручения конечного ранга.

Пусть n — натуральное число, делящееся более чем на четыре различных простых числа. Ясно, что для любого i подгруппа $A^{n^{i+1}}$ — собственная подгруппа в подгруппе A^{n^i} и характеристична в H_1. Отсюда A^{n^i} инвариантна в H и пересечение $\bigcap_{i\in I} A^{n^i}$ равно единице. Такими же свойствами подгруппы A^{n^i} будут обладать и в подгруппе $A \leftthreetimes T$; при этом фактор-группа $A \leftthreetimes T/A^{n^i}$ — конечна и ее порядок делится более чем на четыре простых числа. По лемме 1 и основной теореме из [4] последняя фактор-группа нильпотентна, но тогда $A \leftthreetimes H$ — нильпотентная группа (как конечно-порожденная группа полного прямого произведения конечных нильпотентных групп). Ясно, что A не максимальная подгруппа в бесконечной нильпотентной подгруппе $A \leftthreetimes T$ и, значит, A (как нетрудно показать) — субнормальная подгруппа в группе G. Лемма доказана.

Из лемм 2—4 вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G — бесконечная локальноступенчатая группа с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп. Тогда G — группа Бэра. В частности, группа G локально нильпотентна.*

Следствие 3. *Пусть G — группа с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп. Если G — группа с нормализаторным условием, то всякая подгруппа G субнормальна.*

Теорема 2. *Пусть G — бесконечная локальноступенчатая группа с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп, индексы субнормальности которых ограничены в совокупности. Тогда G — нильпотентная группа.*

Доказательство. Итак, $G \in \mathfrak{K}_c$ для некоторого натурального числа c. Пусть H — произвольная подгруппа G. Покажем, что H субнормальна в G, причем ее индекс субнормальности не выше $c + 1$. Если H максимальна в G, то из локальной нильпотентности G (теорема 1) следует, что подгруппа H нормальна в G. Предположим, что подгруппа H не максимальна в G. Тогда между H и G существует субнормальная подгруппа, индекс субнормальности которой не больше c. Обозначим через K пересечение субнормальных подгрупп группы G, включающих в себя H, индексы субнормальности которых не больше c. По лемме 3.13 из [5] подгруппа K субнормальна в G и ее индекс субнормальности не больше c. Но тогда между H и K нельзя вставить субнормальную в G подгруппу, индекс субнормальности которой не больше c. Поэтому либо $H = K$, либо H максимальна в K. Из локальной нильпотентности G следует, что H нормальна в K. Поэтому подгруппа H субнормальна в G с индексом субнормальности не большим $c + 1$. По теореме Роузбледа [8, теорема 7.42] группа G будет нильпотентной. Теорема доказана.

Приведем несколько следствий теоремы 1.

Группу назовем квазиполной, если она не включает собственных подгрупп конечного индекса. В произвольной группе G подгруппа, порожденная всеми ее квазиполными подгруппами, будет максимальной квазиполной подгруппой группы G. Ее называют квазиполной частью группы G. Назовем группу G редуцированной, если ее квазиполная часть совпадает с единичной подгруппой.

Теорема 3. *Пусть G — редуцированная локальноступенчатая группа с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп. Тогда всякая подгруппа группы G субнормальна.*

Доказательство. Пусть H — произвольная подгруппа группы G. Через K обозначим пересечение тех подгрупп из H, которые имеют в H конечный индекс. Если индекс $|H : K|$ конечен, то подгруппа K не включает собственных подгрупп конечного индекса. Поскольку группа G редуцирована, то $K = (1)$, т. е. подгруппа H конечна. Так как по теореме 1 G — группа Бэра, подгруппа H — субнормальна в G. Рассмотрим случай, когда индекс $|H : K|$ бесконечен. Тогда H включает подгруппу H_1 конечного индекса, которая не максимальна в H. Следовательно, H включает подгруппу L, которая субнормальна в G и имеет в H конечный индекс. Из конечности индекса $|H : L|$ следует соотношение $N_H(L) \neq L$. Пусть $g \in N_H(L) / L$. Так как и подгруппа (g) субнормальна, из леммы 3.13 работы [5] следует субнормальность в G подгруппы $L_1 = (g, L)$. Если $L_1 \neq H$, то снова выбираем элемент $g_2 \in N_H(L_1) / L_1$. Рассуждая аналогично и учитывая, что индекс $|H : L|$ конечен, получаем через конечное число шагов субнормальность подгруппы H. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mann A. Groups with dense normal subgroups, Zsr., J Math. 1968, **6**, № 1, 13—25.
2. Черников С. Н. Группы с плотной системой дополняемых подгрупп.— В кн. Некоторые вопросы теории групп. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975, с. 5—29.
3. Пылаев В. В. Конечные группы с плотной системой субнормальных подгрупп.— В кн.: Некоторые вопросы теории групп. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975, с. 197—217.
4. Пылаев В. В. Конечные группы с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп: — В кн.: Исследования по теории групп.— Киев: Ин-т математики, АН УССР, 1976, с. 111—138.
5. Robinson D. J. S. Infinite soluble and nilpotent groups, London, Iueen Mary Collega, 1968.
6. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп.— М.: Наука, 1972.
7. Курош А. Г. Теория групп.— М.: Наука, 1967.
8. Robinson D. J. S. Finiteness condition and generalized soluble groups, Part 2, Springer — Verlag, Berlin, Heideberg, New York, 1972.

Киевский
педагогический институт

Поступила в редакцию 13.IV 1979 г.;
после переработки — 24.XII 1980 г.