УДК 517.55

Г. Шопф

Построение целой функции многих переменных с заданным асимптотическим распределением ее нулевых точек

В данной статье исследовано распределение нулевых точек целых функций многих комплексных переменных, точнее, построен пример целой функции, корни которой имеют заранее заданное асимптотическое распределение.

Данная работа — естественное продолжение результата из [1], теорема 12; [2].

Пусть $f:\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ — целая функция и $\lambda_f := \{z \in \mathbf{C}^n : f(z) = 0\}$ — ее корневое множество. Рассмотрим введенную в работах [1], [2] характеристику распределения нулевых точек $N_f(r)$, $r \in \mathbf{R}^n_+ := \{r \in \mathbf{R}^n : r_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n\}$. Для краткости укажем связь этой характеристики с самой функцией посредством формулы Иенсена (см., например, [2]):

$$N_f(r) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ldots \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln|f(r_1e^{i\varphi_1}, \ldots, r_ne^{i\varphi_n})|\, d\varphi_1 \wedge \ldots \wedge d\varphi_n - \ln|f(0)|,$$
$$f(0) \neq 0.$$

Функция $N_f(r)$ принадлежит, как известно, классу $\mathfrak{A}$, т. е. она полунепрерывна сверху в $\mathbf{R}^n_+$ и $N_f(|z_1|, \ldots, |z_n|)$ — плюрисубгармоническая в $\mathbf{C}^n$ (см., например, [2]).

Асимптотическое поведение функции $N_f(r)$ опишем при помощи порядок-функции $\rho(x) = \rho_{N_f}$ и тип-функций $\sigma(r; x) = \sigma_{N_f}(r; x)$ по направлениям роста $x \in \mathbf{R}^n$, $\rho(x) > 0$ в смысле Л. С. Маергойза, которые определяются равенствами*)

$$\rho(x) = \rho_{N_f}(x) := \varlimsup_{t \to +\infty} (\ln t)^{-1} \ln \max\{1; N_f(t^x)\},\ x \in \mathbf{R}^n,$$

$$\sigma(r; x) = \sigma_{N_f}(r; x) := \varlimsup_{\substack{t \to +\infty \\ b \to r,\, b \in \operatorname{int}\mathbf{R}^n_+}} t^{-\rho(x)} N_f(bt^x),\ r \in \mathbf{R}^n_+,\ \rho(x) > 0.$$

В дальнейшем всегда предполагается конечный порядок распределения нулей, т. е. $\rho(1, \ldots, 1) < \infty$.

Поскольку $N_f(r) \in \mathfrak{A}$, то (см. [3, 4]), во-первых, порядок-функция $\rho(x)$ является опорной функцией выпуклого компакта**) K, $\{0\} \subset K \subset \mathbf{R}^n_+$, $K = K_{N_f} := \{y \in \mathbf{R}^n : \langle u, y\rangle \leqslant \rho(u)\ \ \forall u \in \mathbf{R}^n\}$, т. е. $\rho(x) = \rho_{N_f}(x) = H_K(x) :=$

*) Обозначения: $t^x = (t^{x_1}, \ldots, t^{x_n})$, $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^n$; $bt^x = b_1t^{x_1}, \ldots, b_nt^{x_n})$, $t>0$, $b \in \mathbf{R}^n$, $x \in \mathbf{R}^n$.

**) Обозначение $\langle x, y\rangle := \sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i$, $x, y \in \mathbf{R}^n$.

$=\sup_{y\in K_{N_f}}\langle x, y\rangle$, и, во-вторых, тип-функция $\sigma(r; x)$ по направлению x, $\rho(x)>0$ является $(x, \rho(x))$-параболическим функционалом Минковского замкнутой полной *), логарифмически выпуклой **) области $A=A^x_{N_f}\subset \mathbf{R}^n_+$, для которой любая опорная гиперплоскость ее образа при отображении $(r_1, \dots, r_n)\to(\ln r_1, \dots, \ln r_n)$ параллельна некоторой проходящей через точку x опорной гиперплоскости к $\{y\in\mathbf{R}^n : \rho(x)\geqslant\rho(y)\}$, $A=A^x_{N_f}:=\{r\in\mathbf{R}^n_+ : \sigma(r; x)\leqslant 1\}$, т. е. $\sigma(r; x)=\inf\{\alpha^{\rho(x)}>0 : (\alpha^{-1})^x r\in A\}$.

Известно (см., например, [4]), что как для любой функции, являющейся $(x, \rho(x))$-параболическим функционалом Минковского области указанного вида, так и для тип-функции имеет место представление $\sigma(r; x)= =\sup_{\lambda\in\partial\rho(x)} r^{\lambda}e^{-g(\lambda)}$; $r^{\lambda}=(r_1^{\lambda_1}, \dots, r_n^{\lambda_n})$, где $\partial\rho(x):=\{\lambda\in K : \langle\lambda, x\rangle=\rho(x)\}$ — субдифференциал функции $\rho(x)$ в точке x и $g(\lambda)$ замкнутая***) выпуклая функция такая, что $\operatorname{dom} g\subset\partial\rho(x)$.

Заметим, что вместо порядок- и тип-функций для описания асимптотического поведения функции $N_f(r)$ можно использовать более распространенные понятия «сопряженные порядки» и «сопряженные G-типы» по Баумгартнеру — Ронкину [4]. При этом следует сказать, что гиперповерхности сопряженных порядков и G-типов определяют только часть асимптотик порядок- и тип-функций [3—5].

Гиперповерхностью сопряженных порядков функции $N_f(r)$ называется граница $S_\rho(N_f)$ множества $B_\rho(N_f):=\left\{a\in\operatorname{int}\mathbf{R}^n_+ : \rho\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right)<1\right\}$, а гиперповерхностью сопряженных G-типов (г. с. G-т.) при сопряженных порядках $\rho_1>0, \dots, \rho_n>0$ функции $N_f(r)$ называется граница $S^G_\sigma(N_f; \rho)$ множества ****) $(\rho=(\rho_1, \dots, \rho_n))$ $B^G_\sigma(N_f; \rho):=\{b\in\operatorname{int}\mathbf{R}^n_+ : \sup_{c\in\operatorname{ri}G}\sigma(cb^{-1/\rho}; 1/\rho)<1\}$. Здесь G — замкнутая ограниченная полная область в $\mathbf{R}^n_+$.

В работе [1] построен пример целой функции $f(z)$ такой, что функция $N_f(r)$ имеет заранее заданную гиперповерхность сопряженных порядков.

Мы построим такую целую функцию f, для которой заранее заданы порядок-функция и по одному направлению роста тип-функция распределения нулевых точек. Этот пример легко обобщается в случае, когда заранее задано целое семейство тип-функций, как в работах [6] и [7] (см. также [5]. Ради простоты изложения это построение приводить не будем.

Теорема. *Пусть задан некоторый выпуклый компакт K с $\{0\}\subset \subset K\subset\mathbf{R}^n_+$, а также для одного $x^0\in\mathbf{R}^n$ с $\varphi(x^0):=H_K(x^0)=1$ задана замкнутая полная логарифмически выпуклая область $A\subset\mathbf{R}^n_+$ $(\operatorname{int}A\neq\varnothing)$ такая, что (соответствующим образом нормированная) нормаль опорной гиперплоскости ее образа при отображении $(r_1, \dots, r_n)\to(\ln r_1, \dots, \ln r_n)$ содержится в $\partial\varphi(x^0):=\{\lambda\in K : \langle\lambda, x^0\rangle=\varphi(x^0)=1\}$.*

Тогда существует такая целая функция $f(z)$, $z\in\mathbf{C}^n$, $f(0)=1$, что ее характеристика распределения нулевых точек $N_f(r)$ имеет порядок-функцию $\rho(y)=\varphi(y):=H_K(y)=\sup_{z\in K}\langle z, y\rangle$, $y\in\mathbf{R}^n$, и тип-функцию по направлению x^0

$$\sigma(r; x^0)=\psi(r):=\inf\{\alpha>0 : (\alpha^{-1})^x r\in A\},\ r\in\mathbf{R}^n_+.$$

---

*) Область $A\subset\mathbf{R}^n_+$ называется полной, если из $a^0\in A$ следует, что $\{a\in\mathbf{R}^n_+ : a_i\leqslant a_i^0,\ i=1, \dots, n\}\subset A$

**) Т. е. образ при отображении $(r_1, \dots, r_n)\to(\ln r_1, \dots, \ln r_n)$ является выпуклым.

***) Выпуклая функция называется замкнутой, если она полунепрерывна снизу и нигде не обращается в $-\infty$ или, если она тождественно равна $-\infty$. Обозначение $\operatorname{dom} g:= :=\{\lambda\in R^n : g(\lambda)<\infty\}$.

****) Через ri обозначим относительную внутренность.

Замечание. В случае, когда вместо порядок- и тип-функции заданы (согласованные, см. [6], теорема 1) гиперповерхности сопряженных порядков и при одной системе сопряженных порядков гиперповерхности сопряженных G-типов, можно свести построение искомой функции к теореме, полагая, $K = \{z \in \mathbf{R}_+^n : H_{B^{-1}}(z) \leqslant 1\}$, где $B \subset \mathbf{R}_+^n$ область, определяющая гиперповерхности сопряженных порядков и $A = \bigcap\limits_{c \in \operatorname{ri} G} cM^{-\frac{1}{\rho}} \frac{1}{\rho} = \left(\frac{1}{\rho_1}, \dots, \frac{1}{\rho_n}\right)$, где $M \subset \mathbf{R}_+^n$ область, определяющая гиперповерхности сопряженных G-типов при системе сопряженных порядков $\rho_1 > 0, \dots, \rho_n > 0$.

Доказательство теоремы. Как указывалось выше (см. также [2, с. 1043]), существует единственная замкнутая выпуклая в $\mathbf{R}^n$ функция $g(\lambda)$, такая, что $\operatorname{dom} g \subset \partial\varphi(x^0)$ и что

$$\psi(r) = \sup\nolimits_{\lambda \in \mathbf{R}^n} r^\lambda e^{-g(\lambda)}. \tag{1}$$

Рассмотрим какую-либо плотную в $\operatorname{ri} \operatorname{dom} g$ счетную последовательность точек. Далее выберем счетное множество точек, плотное во множестве $\left(\bigcup\limits_{x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}} \partial\varphi(x)\right) \setminus \operatorname{dom} g$. Обозначим обьединенную счетную последовательность через $\{\lambda^{(i)}\}_{i=1}^\infty$.

Определим биективное отображение *) $J : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ соотношением $J : (i, m) \to i + (i + m - 2)(i + m - 1)/2$. Затем для каждого $i = 1, 2, \dots$ выберем такую последовательность целочисленных неотрицательных мультииндексов $\{k^{(i,m)}\}_{m=1}^\infty$, $k^{(i,m)} = (k_1^{(i,m)}, \dots, k_n^{(i,m)})$, что:

1) $|\lambda^i - k^{(i,m)}/c_{i,m}| < (J(i, m))^{-1}$, $m = 1, 2, \dots$, где $k^{(i,m)}/c_{i,m} = (k_1^{(i,m)}/c_{i,m}, \dots, k_n^{(i,m)}/c_{i,m})$, $c_{i,m} \geqslant 0$ и $c_{i,m} := \langle y^{(i)}, k^{(i,m)} \rangle$, $\lambda^{(i)} \in \partial\varphi(y^{(i)})$, $\varphi(y^{(i)}) = 1$;

2) $\langle \lambda^{(i)}, x^0 \rangle \langle \varphi(x^0) = 1 \Rightarrow \langle k^{(i,m)}/c_{i,m}, x^0 \rangle \leqslant 1$, $m = 1, 2, \dots$;

3) $\alpha_1 \geqslant e$, $\alpha_{j+1} > e\alpha_j$, $j = 1, 2, \dots$ и $\lim\limits_{j \to \infty} \dfrac{(j-1)\alpha_{j-1} \ln \alpha_j}{\alpha_j} = 0$, где $\alpha_j := c_{J^{-1}(j)}$, $j = 1, 2, \dots$. Условия 3) для последовательности $\{k^{(i,m)}\}_{i,m=1}^\infty$ выполнимы всегда, если умножать мультииндекс $k^{(i,m)}$ на достаточно большое целое число. Очевидно, что условия 1) и 2) при этом не меняются.

Обозначим

$$a_{i,m} := \begin{cases} \left(\dfrac{\exp\{1 - g(\lambda^{(i)})\}}{c_{i,m}}\right)^{c_{i,m}} & \text{при } \lambda^{(i)} \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} g \\ \left(\dfrac{\exp\{1 - \ln \ln c_{i,m}\}}{c_{i,m}}\right)^{c_{i,m}} & \text{при } \lambda^{(i)} \notin \operatorname{dom} g. \end{cases}$$

Функция $f(z) := \bigcup\limits_{i,m=1}^{\infty} (1 - a_{i,m} z^{k^{(i,m)}})$, $z \in \mathbf{C}^n$, $z^{k^{(i,m)}} = z_1^{k_1^{(i,m)}} \dots z_n^{k_n^{(i,m)}}$ является целой, поскольку $\varlimsup\limits_{i,m \to \infty} \sqrt[\|k^{(i,m)}\|]{a_{i,m}} = 0$.

Покажем, что построенная таким образом целая функция $f(z)$ является искомой. Имеем $N_f(r) = \left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \dots \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln |f(r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n})| \, d\theta_1 \wedge \dots \wedge d\theta_n = \sum\limits_{i,m=1}^{\infty} c_{i,m} \ln^+ (a_{i,m}^{1/c_{i,m}} r^{k^{(i,m)}/c_{i,m}})$.

---

*) $\mathbf{N} := \{1, 2, \dots\}$.

З а м е ч а н и е. В случае, когда вместо порядок- и тип-функции заданы (согласованные, см. [6], теорема 1) гиперповерхности сопряженных порядков и при одной системе сопряженных порядков гиперповерхности сопряженных G-типов, можно свести построение искомой функции к теореме, полагая, $K=\{z\in\mathbf{R}_+^n : H_{B-1}(z)\leqslant 1\}$, где $B\subset\mathbf{R}_+^n$ область, определяющая гиперповерхности сопряженных порядков и $A=\bigcap\limits_{c\in\mathrm{ri}\,G} cM^{-\frac{1}{\rho}}\,\frac{1}{\rho}=\left(\frac{1}{\rho_1},\ldots,\frac{1}{\rho_n}\right)$, где $M\subset\mathbf{R}_+^n$ область, определяющая гиперповерхности сопряженных G-типов при системе сопряженных порядков $\rho_1>0,\ldots,\rho_n>0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Как указывалось выше (см. также [2, с. 1043]), существует единственная замкнутая выпуклая в $\mathbf{R}^n$ функция $g(\lambda)$, такая, что $\operatorname{dom} g\subset\partial\varphi(x^0)$ и что

$$\psi(r)=\sup\nolimits_{\lambda\in\mathbf{R}^n} r^{\lambda}e^{-g(\lambda)}. \tag{1}$$

Рассмотрим какую-либо плотную в $\mathrm{ri}\,\operatorname{dom} g$ счетную последовательность точек. Далее выберем счетное множество точек, плотное во множестве $\left(\bigcup\limits_{x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}}\partial\varphi(x)\right)\setminus\operatorname{dom} g$. Обозначим обьединенную счетную последовательность через $\{\lambda^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$.

Определим биективное отображение *) $J:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ соотношением $J:(i,m)\to i+(i+m-2)(i+m-1)/2$. Затем для каждого $i=1,2,\ldots$ выберем такую последовательность целочисленных неотрицательных мультииндексов $\{k^{(i,m)}\}_{m=1}^{\infty}$, $k^{(i,m)}=(k_1^{(i,m)},\ldots,k_n^{(i,m)})$, что:

1) $|\lambda^i-k^{(i,m)}/c_{i,m}|<(J(i,m))^{-1}$, $m=1,2,\ldots$, где $k^{(i,m)}/c_{i,m}=(k_1^{(i,m)}/c_{i,m},\ldots,k_n^{(i,m)}/c_{i,m})$, $c_{i,m}\geqslant 0$ и $c_{i,m}:=\langle y^{(i)},k^{(i,m)}\rangle$, $\lambda^{(i)}\in\partial\varphi(y^{(i)})$, $\varphi(y^{(i)})=1$;

2) $\langle\lambda^{(i)},x^0\rangle\langle\varphi(x^0)=1\Rightarrow\langle k^{(i,m)}/c_{i,m},x^0\rangle\leqslant 1$, $m=1,2,\ldots$;

3) $\alpha_1\geqslant e$, $\alpha_{j+1}>e\alpha_j$, $j=1,2,\ldots$ и $\lim\limits_{j\to\infty}\dfrac{(j-1)\alpha_{j-1}\ln\alpha_j}{\alpha_j}=0$, где $\alpha_j:=c_{J^{-1}(j)}$, $j=1,2,\ldots$. Условия 3) для последовательности $\{k^{(i,m)}\}_{i,m=1}^{\infty}$ выполнимы всегда, если умножать мультииндекс $k^{(i,m)}$ на достаточно большое целое число. Очевидно, что условия 1) и 2) при этом не меняются. Обозначим

$$a_{i,m}:=\begin{cases}\left(\dfrac{\exp\{1-g(\lambda^{(i)})\}}{c_{i,m}}\right)^{c_{i,m}} & \text{при } \lambda^{(i)}\in\mathrm{ri}\,\operatorname{dom} g\\[2ex] \left(\dfrac{\exp\{1-\ln\ln c_{i,m}\}}{c_{i,m}}\right)^{c_{i,m}} & \text{при } \lambda^{(i)}\notin\operatorname{dom} g.\end{cases}$$

Функция $f(z):=\bigcup\limits_{i,m=1}^{\infty}(1-a_{i,m}z^{k^{(i,m)}})$, $z\in\mathbf{C}^n$, $z^{k^{(i,m)}}=z_1^{k_1^{(i,m)}}\ldots z_n^{k_n^{(i,m)}}$ является целой, поскольку $\overline{\lim\limits_{i,m\to\infty}}\ \sqrt[\|k^{(i,m)}\|]{a_{i,m}}=0$.

Покажем, что построенная таким образом целая функция $f(z)$ является искомой. Имеем $N_f(r)=\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ldots\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln|f(r_1e^{i\theta_1},\ldots,r_ne^{i\theta_n})|\,d\theta_1\wedge\ldots\wedge d\theta_n=\sum\limits_{i,m=1}^{\infty}c_{i,m}\ln^+(a_{i,m}^{1/c_{i,m}}r^{k^{(i,m)}/c_{i,m}})$.

*) $\mathbf{N}:=\{1,2,\ldots\}$.

Заметим, что функция $\varphi(z)$ как опорная компакта является конечной выпуклой $\mathbf{R}^n$ функцией и тем самым непрерывной. Из-за плотности последовательности $\{\lambda^{(l)}\}_{l=1}^{\infty}$ из (5) вытекает

$$\rho(y) \geqslant \sup_{\lambda \in K} \langle y, \lambda \rangle = \varphi(y) \tag{6}$$

и, стало быть, сочетание (3) и (6) доказывает, что $\rho(y) = \varphi(y)$, $y \in \mathbf{R}^n$, т. е. первую часть теоремы.

2. Вычислим теперь тип-функцию распределения нулевых точек целой функции $f(z)$ по направлению x^0, $\rho(x^0) = 1$.

Обозначим через I' те индексы i, для которых $\lambda^{(i)} \notin \operatorname{dom} g$, а через I'' все остальные, т. е. те, для которых $\lambda^{(i)} \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} g$. Имеем при $r \in \operatorname{int} \mathbf{R}^n_+$

$$\sigma(r; x^0) = \sigma_{N_f}(r; x^0) = \varlimsup_{t \to \infty} t^{-1} \sum_{i, m=1}^{\infty} c_{i,m} \ln^+ \left(a_{i,m}^{1/c_{i,m}} r^{k^{(i,m)}/c_{i,m}} t^{\langle x^0, k^{(i,m)} \rangle / c_{i,m}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{t \to \infty} t^{-1} \sum_{i \in I'} \sum_{m=1}^{\infty} c_{i,m} \ln^+ \left(e \frac{r^{k^{(i,m)}/c_{i,m}}}{c_{i,m} \ln c_{i,m}} t^{\langle x^0, k^{(i,m)} \rangle / c_{i,m}} \right) +$$

$$\times \varlimsup_{t \to \infty} t^{-1} \sum_{i \in I''} \sum_{m=1}^{\infty} c_{i,m} \ln^+ \left(e \frac{r^{\lambda^{(i)}} e^{-g(\lambda^{(i)})}}{c_{i,m}} r^{k^{(i,m)}/c_{i,m} - \lambda^{(i)}} t \right),$$

где учтено, что при $i \in I''$ согласно определению $c_{i,m} = \langle x^0, k^{(i,m)} \rangle$.

Учитывая оценку (3) и тождество (1), а также свойство 1) последовательности $\{k^{(i,m)}\}_{m=1}^{\infty}$, легко находим, что второе слагаемое последнего неравенства оценится сверху через $\psi(r)$. Для оценки первого слагаемого заметим, что если $\lambda^{(i)} \notin \partial\varphi(x^0)$, то $\langle x^0, \lambda^{(i)} \rangle < 1$ и, согласно выбору последовательности индексов $\{k^{(i,m)}\}$ $\langle x^0, k^{(i,m)} \rangle / c_{i,m} < 1$. А если $\lambda^{(i)} \in \partial\varphi(x^0) \setminus \operatorname{dom} g$, то, как отмечалось $\langle x^0, k^{(i,m)} \rangle / c_{i,m} = 1$. Стало быть, экспонента от t в первом слагаемом оценивается сверху через 1.

Пользуясь снова оценкой (3) с учетом соотношения $\dfrac{r^{k(J^{-1}(j))}/\alpha_j}{\ln \alpha_j} \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$, получаем, что первое слагаемое равно нулю. Значит, установлена оценка

$$\sigma(r; x^0) \leqslant \psi(r), \quad r \in \operatorname{int} \mathbf{R}^n_+. \tag{7}$$

Обратную оценку тип-функции получим точно так же, как и оценку снизу для порядок-функции, если вместо t_q для произвольно фиксированного $l \in I''$ полагать $t_q = c_{l,q} e^{g(\lambda^{(l)})} r^{-k^{(l,q)}/c_{l,q}}$, $q = 1, 2, \ldots$, $t_q \xrightarrow[q \to \infty]{} \infty$. Тогда имеем $\sigma(r; x^0) \geqslant r^{\lambda^{(l)}} e^{-g(\lambda^{(l)})}$, $l \in I''$, $r \in \operatorname{int} \mathbf{R}^n_+$. Последовательность $\{\lambda^{(l)}\}_{l \in I''}$ всюду плотна в $\operatorname{ri} \operatorname{dom} g$ и функция g на $\operatorname{ri} \operatorname{dom} g$ непрерывна, следовательно, $\sigma(r; x^0) \geqslant \sup_{\lambda \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} g} r^{\lambda} e^{-g(\lambda)}$.

Поскольку функция $g(\lambda)$ выпукла (см. [8, следствие 12. 2. 2]), имеем $\sup_{\lambda \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} g} r^{\lambda} e^{-g(\lambda)} = \sup_{\lambda \in \mathbf{R}^n} r^{\lambda} e^{-g(\lambda)}$. Значит,

$$\sigma(r; x^0) \geqslant \sup_{\lambda} r^{\lambda} e^{-g(\lambda)} = \psi(r), \quad r \in \operatorname{int} \mathbf{R}^n_+. \tag{8}$$

Сочетание оценок (7) и (8) дает $\sigma(r; x^0) = \psi(r)$, $r \in \operatorname{int} \mathbf{R}^n_+$. В силу непрерывности в $\mathbf{R}^n_+$ функций $\sigma(r; x^0)$ и $\psi(r)$ (см., например, [4, 5], последняя оценка верна при всех $r \in \mathbf{R}^n_+$. Теорема доказана.

Как отмечалось выше, легко обобщить данную теорему на случай, когда заданы не только одна тип-функция (гиперповерхности сопряженных

1. **Вычислим** порядок-функцию распределения нулевых точек целой функции $f(z)$.

Пусть $y \in \mathbf{R}^n$. Поскольку $\langle y, k^{(i,m)}\rangle / c_{i,m} \leqslant \langle y, \lambda^{(i)}\rangle + (J(i, m))^{-1}|y| \leqslant \varphi(y) + |y|(J(i, m))^{-1}$ и поскольку в силу замкнутости g $\beta := \inf_\lambda g(\lambda)$, $|\beta| < \infty$, то

$$\rho(y) = \overline{\lim_{t\to\infty}} (\ln t)^{-1} \ln \sum_{i,m=1}^{\infty} c_{i,m} \ln^+ (a_{i,m}^{1/c_{i,m}} \times t^{\langle y, k^{(i,m)}\rangle / c_{i,m}}) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{t\infty\to}} (\ln t)^{-1} \ln \left[\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \ln^+ \left(e \frac{e^{-\beta}}{\alpha_j} t^{\varphi(y)+2|y|} \right) + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \ln^+ \left(e \frac{e^{-\beta}}{\alpha_j} t^{\varphi(y)+\varepsilon} \right) \right] \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} (\ln t)^{-1} \ln \sum_{=N+1}^{\infty} \alpha_j \ln^+ \left(e \frac{e^{-\beta}}{\alpha_j} t^{\varphi(y)+\varepsilon} \right), \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно, и $N = N(\varepsilon, y)$ такое, что $|y|(J(i, m))^{-1} < \varepsilon$ при $J(i, m) > N$.

Для дальнейшей оценки последнего выражения в (2) рассмотрим сразу более общую ситуацию, так как она понадобится для —оценки тип-функции.

Итак, оценим сверху величину $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \ln^+ \left(e \frac{\zeta}{\alpha_j} t^\eta \right)$, ζ, η, $t > 0$. Найдется такой номер $N = N(t)$, что $\alpha_N \leqslant \zeta t^\eta < \frac{\alpha_{N+1}}{e}$.

Учитывая монотонное убывание функции $h(t) = t^{-\eta} \ln \left(e \frac{\zeta}{\alpha_j} t^\eta \right)$ при $\zeta t^\eta \geqslant \alpha_j$ и свойства последовательности $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$, получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \ln^+ \left(e \frac{\zeta t^\eta}{\alpha_j} \right) = t^\eta \sum_{i=1}^{N} \alpha_j t^{-\eta} \ln \left(e \frac{\zeta t^\eta}{\alpha_j} \right) \leqslant \zeta t^\eta \sum_{i=1}^{N} (\alpha_j / \alpha_N) \ln \frac{e\alpha_N}{\alpha_j} \leqslant$$

$$\leqslant \zeta t^\eta \left[1 + \frac{2(N-1)\,\alpha_{N-1} \ln \alpha_N}{\alpha_N} \right] = (1 + o(t))\, \zeta t^\eta, \tag{3}$$

где $o(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

Применяя оценку (3) к соотношению (2) с учетом произвольности $\varepsilon > 0$, немедленно получаем

$$\rho(y) \leqslant \varphi(y), \quad y \in \mathbf{R}^n. \tag{4}$$

Докажем обратное неравенство. Произвольно фиксируя $l \in \mathbf{N}$ и полагая $t_q = \exp\{1 - (\ln a_{l,q}) / \langle y, k^{(l,q)}\rangle\}$, $q = 1, 2, \ldots, t_q \xrightarrow[q\to\infty]{} \infty$, имеем

$$\rho(y) \geqslant \overline{\lim_{q\to\infty}} (\ln t_q)^{-1} \ln (c_{l,q} \ln^+ (a_{l,q}^{\frac{1}{c_{l,q}}} t_q^{\frac{\langle y, k^{(l,q)}\rangle}{c_{l,q}}})) = \overline{\lim_{q\to\infty}} \left(1 - \frac{c_{l,q}}{\langle y, k^{(l,q)}\rangle} \ln a_{l,q}^{\frac{1}{c_{l,q}}} \right)^{-1} \times$$

$$\times \left(\ln \left(\frac{\langle y, k\rangle^{(l,q)}}{c_{l,q}} \right) + \ln c_{l,q} \right).$$

Подставляя сюда значение для $a_{l,q}$ в зависимости от принадлежности λ^l к $\mathrm{ri\,dom}\, g$ получаем

$$\rho(y) \geqslant \langle y, \lambda^l \rangle, \quad l = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$