УДК 517.

Ф. У. Носиров

О влиянии запаздывания на одночастотные колебания

В настоящей работе рассматриваются нелинейные колебательные системы с запаздыванием, параметры и запаздывания которых медленно изменяются во времени. С помощью метода Крылова — Боголюбова—Митропольского [1, 2] построены асимптотические разложения для решений уравнений.

Пусть колебательные системы с запаздыванием описываются системами уравнений вида

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{N} a_{ij}(\tau-\varepsilon\gamma_1(\tau))\,\dot q\,(t)\right\}+\sum_{i=1}^{N} b_{ij}(\tau-\varepsilon\gamma_1(\tau))\,q_i(t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N} c_{ij}(\tau-\varepsilon\gamma_1(\tau))\,q\,(t-\gamma_2(\tau))=\varepsilon Q\,(\tau,\,\theta,\,q_1,\ldots,\,q_N,\,q_1(t-\gamma_3(\tau)),\ldots$$

$$\ldots,\,q_N(t-\gamma_3(\tau)),\,\dot q_1,\ldots,\,\dot q_N,\,\dot q_1(t-\gamma_3(\tau)),\ldots,\,\dot q_N(t-\gamma_3(\tau)))\quad (j=1,2,\ldots,N), \tag{1}$$

где $\tau=\varepsilon t$ — «медленное» время; функции Q_j, a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, γ_1, γ_2, γ_3 достаточное число раз непрерывно дифференцируемы по τ на интервале $0\leqslant\tau\leqslant L$, на котором рассматривается колебательный процесс, причем $\gamma_1(\tau)$, $\gamma_2(\tau)$, $\gamma_3(\tau)$ неотрицательные при $0\leqslant\tau\leqslant L$. Предположим, кроме того, что $\frac{d\theta}{d\tau}=\nu(\tau)$, то есть мгновенная частота внешней периодической силы тоже медленно изменяется со временем, а функция Q_j — периодическая по θ с периодом 2π и может быть представлена в виде $Q_j(\tau,\,\theta,\,q_1,\ldots,\,q_N,\,q_1(t-\gamma_3),\ldots,\,q_N(t-\gamma_3),$

$$\dot q_1,\ldots,\,\dot q_N,\,\dot q_1(t-\gamma_3),\ldots,\,\dot q_N(t-\gamma_3))=\sum_{n=-N}^{N} e^{iN\theta}Q_{jn}(\tau,\,q_1,\ldots,\,q_N,\,q_1(t-\gamma_3),\ldots$$

$\ldots,\,q_N(t-\gamma_3),\,\dot q_1,\ldots,\,\dot q_N,\,\dot q_1(t-\gamma_3),\ldots,\,\dot q_N(t-\gamma_3))$, при этом коэффициенты конечной суммы — некоторые полиномы по отношению к своим переменным.

Подобные системы (1) без запаздывания исследованы в [2].

Предположим, что порождающее уравнение

$$\sum_{i=1}^{N}\{a_{ij}\ddot q_i+b_{ij}q_i+c_{ij}q_i(t-\gamma_2(\tau))\}=0, \tag{2}$$

в котором τ — постоянная величина, допускает семейство периодических решений

$$q_i^{(k)}(t)=\varphi_i^{(k)}(\tau)\,a\cos(\omega_k t+\varphi), \tag{3}$$

где ω_k $(k=1,2,\ldots,N)$ — собственные частоты, определяемые уравнением

$$D\,\|-a_{ij}\omega^2+b_{ij}+c_{ij}e^{-i\omega\gamma_2}\|=0, \tag{4}$$

причем уравнения (4) не имеют корней, кратных $\omega(\tau)$ и вида $n\omega(\tau)$ $(n=0,2,3,\ldots)$, а $\varphi_i^{(k)}(\tau)$ — нормальные функции, являющиеся нетривиальными решениями системы однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{N} \{-a_{ij}\omega_k^2 + b_{ij} + c_{ij}e^{-i\omega\gamma_2}\} \varphi_i^{(k)}(\tau) = 0 \tag{5}$$

и обладающие свойствами ортогональности.

Приближенные решения системы уравнений (1) ищем в виде асимптотических рядов

$$q_i(t) = \varphi_i^{(1)} a \cos(p\varphi + \psi) + \varepsilon u_i^{(1)}(\tau, \theta, a, p\varphi + \psi) + \varepsilon^2 u_i^{(2)}(\tau, \theta, a, p\varphi + \psi) + \dots, \tag{6}$$

в которых функции $u_i^{(l)}(\tau, \theta, a, p\varphi + \psi)$ $(l = 1, 2, \dots,\ i = 1, 2, \dots, N)$ периодические по θ и $p\varphi + \psi$ с периодом 2π, а величины a и ψ как функции времени определяются из системы

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a, \psi) + \dots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a, \psi) + \dots . \end{aligned} \tag{7}$$

Для определения функций A_1, B_1, u_1, A_2, B_2, u_2, ... продифференцируем правую часть выражения (6) с учетом (7) и подставим результат в уравнение (1), правую часть которого разложим в ряд Тейлора. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε получаем следующую систему уравнений:

$$\sum_{i=1}^{N} \Big\{ a_{ij}(\tau) \Big[\frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial\theta^2}\nu^2(\tau) + 2\frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial\theta\partial(p\varphi+\psi)}\nu(\tau)\omega_1(\tau) + \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial(p\varphi+\psi)^2}\omega_1^2(\tau) \Big] +$$

$$+ b_{ij}(\tau) u_i^{(1)} + c_{ij}(\tau) u_i^{(1)}(\tau, \theta - \gamma_2(\tau), a, p\varphi + \psi - \gamma_2(\tau)\omega_1(\tau)) \Big\} =$$

$$= Q_{j0}^{(1)}(\tau, \theta, a, p\varphi + \psi) - \sum_{i=1}^{N} a_{ij}(\tau)\varphi_i^{(1)}(\tau) \Big[\frac{\partial A_1}{\partial\psi}\Big(\omega_1(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau)\Big) -$$

$$- 2a\omega_1(\tau) B_1 \Big] + c_{ij}(\tau)\varphi_i^{(1)}(\tau)\gamma_2(\tau) \Big[\Big[-A_1 + \frac{\gamma_2(\tau)}{2}\frac{\partial A_1}{\partial\psi}(\omega_1(\tau) -$$

$$- \frac{p}{q}\nu(\tau)\Big)\Big] \cos\gamma_2\omega_1 + a\Big[-B_1 + \frac{\gamma_2(\tau)}{2}\Big(\omega_1(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau)\Big)\frac{\partial B_1}{\partial\psi}\Big] \sin\gamma_2\omega_1 \Big] \times$$

$$\times \cos(p\varphi + \psi) + \Big[a_{ij}(\tau)\varphi_i^{(1)}(\tau)\Big[-2\omega_1(\tau) A_1 - a\frac{\partial B_1}{\partial\psi}\Big(\omega_1(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau)\Big)\Big] +$$

$$+ c_{ij}(\tau)\varphi_i^{(1)}(\tau)\gamma_2(\tau)\Big[\Big[-A_1 + \frac{\gamma_2(\tau)}{2}\Big(\omega_1(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau)\Big)\frac{\partial A_1}{\partial\psi}\Big] \sin\gamma_2\omega_1 -$$

$$- a\Big[-B_1 + \frac{\gamma_2(\tau)}{2}\Big(\omega_1(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau)\Big)\frac{\partial B_1}{\partial\psi}\Big] \cos\gamma_2\omega_1 \Big]\Big] \sin(p\varphi + \psi) +$$

$$+\left[-2a\omega_1(\tau)\frac{d\varphi_i^{(1)}(\tau)}{d\tau}a_{ij}(\tau)-\varphi_i^{(1)}(\tau)a\frac{d\omega_1(\tau)}{d\tau}a_{ij}(\tau)-\varphi_i^{(1)}(\tau)a\omega_1\times\right.$$

$$\left.\times\frac{da_{ij}(\tau)}{d\tau}+a(M_1\gamma_1(\tau)+M_2\gamma_2(\tau))\right]\sin(p\varphi+\psi)+a(M_3\gamma_1(\tau)+M_4\gamma_2(\tau))\times$$

$$\times\cos(p\varphi+\psi)=G_{j0}(\tau,\theta,a,p\varphi+\psi), \tag{8}$$

где $Q_{j0}^{(1)}(\tau,\theta,a,p\varphi+\psi)=Q_j^{(1)}(\tau,\theta,q_{10},\ldots,q_{10}(t-\gamma_3(\tau)),\ldots,\dot{q}_{10},\ldots$ $\ldots,\dot{q}_{10}(t-\gamma_3(\tau)))$ — периодические функции по θ и $p\varphi+\psi$ с периодом 2π, а

$$q_{i0}=\varphi_i^{(1)}(\tau)a\cos(p\varphi+\psi),\quad q_{i0}(t-\gamma_3(\tau))=\varphi_i^{(1)}(\tau)a\cos(p\varphi+\psi-\gamma_3\omega_1),$$

$$\dot{q}_{i0}=-\varphi_i^{(1)}(\tau)a\omega_1\sin(p\varphi+\psi),\quad \dot{q}_{i0}(t-\gamma_3(\tau))=-\varphi_i^{(1)}(\tau)a\omega_1\sin(p\varphi+$$

$$+\psi-\gamma_3\omega_1),\quad M_1=\frac{da_{ij}(\tau)}{d\tau}\varphi_i^{(1)}(\tau)\omega_1^2-\frac{db_{ij}(\tau)}{d\tau}\varphi_i^{(1)}(\tau)-$$

$$-\frac{dc_{ij}}{d\tau}\varphi_i^{(1)}(\tau)\cos\gamma_2\omega_1,\quad M_2=c_{ij}(\tau)\left(-\frac{d\varphi_i^{(1)}(\tau)}{d\tau}\cos\gamma_2\omega_1+\varphi_i^{(1)}(\tau)\frac{\gamma_2(\tau)}{2}\times\right.$$

$$\left.+\frac{d\omega_1(\tau)}{d\tau}\sin\gamma_2\omega_1\right),\quad M_3=-\frac{dc_{ij}(\tau)}{d\tau}\varphi_i^{(1)}(\tau)\sin\gamma_2\omega_1,\quad M_4=c_{ij}(\tau)\times$$

$$\times\left(-\frac{d\varphi_i^{(1)}(\tau)}{d\tau}\sin\gamma_2\omega_1-\varphi_i^{(1)}(\tau)\frac{\gamma_2(\tau)}{2}\cdot\frac{d\omega_1}{d\tau}\cos\gamma_2\omega_1\right). \tag{9}$$

Разложим функции $G_{i0}^{(1)}(\tau,\theta,a,p\varphi+\psi)$, $u_i^{(1)}(\tau,\theta,a,p\varphi+\psi)$ в ряды Фурье:

$$G_{i0}^{(1)}(\tau,a,\theta,p\varphi+\psi)=\sum_{n,m}g_{nm}^{(i1)}(\tau,a)e^{i\{n\theta+m(p\varphi+\psi)\}}, \tag{10}$$

где

$$g_{nm}^{(i1)}(\tau,a)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}G_{i0}^{(1)}(\tau,a,\theta,p\varphi+\psi)e^{-i\{n\theta+m(p\varphi+\psi)\}}d\theta d(p\varphi+\psi), \tag{11}$$

$$u_i^{(1)}(\tau,\theta,a,p\varphi+\psi)=\sum_{n,m}K_{nm}^{(j1)}(\tau,a)e^{i\{n\theta+m(p\varphi+\psi)\}}. \tag{12}$$

Подставляя в уравнения (9) значения (11), (12) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем

$$\sum_{j=1}^{N}\{a_{ij}(\tau)[-(\omega_1(\tau)m+\nu(\tau)n)^2]+b_{ij}(\tau)+$$
$$+c_{ij}(\tau)e^{-i\gamma_2(n\nu(\tau)+m\omega_1(\tau))}\}K_{nm}^{(j1)}(\tau,a)=g_{nm}^{(j1)}(\tau,a). \tag{13}$$

Выражение для $K_{nm}^{(j1)}$ будем искать в виде суммы

$$K_{nm}^{(j1)}(\tau,a)=\sum_{k=1}^{N}c_k\varphi_i^{(k)}(\tau). \tag{14}$$

Подставляя (14) в систему (13) и учитывая (5), находим

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\{a_{ij}(\tau)[\omega_k^2(\tau)-(\omega_1(\tau)m+\nu(\tau)n)^2]-c_{ij}(\tau)[e^{-i\omega_k\gamma_2}-$$
$$-e^{-i\gamma_2(\omega_1m+\nu n)}]\}c_k\varphi_i^{(k)}(\tau)=g_{nm}^{(i1)}(\tau,a). \tag{15}$$

Принимая во внимание (6) и обозначая

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(\tau)\,\varphi_i^{(k)}(\tau)\,\varphi_j^{(k)}(\tau)=m_k(\tau),\quad \sum_{i,j=1}^{N} c_{ij}(\tau)\,\varphi_i^{(k)}(\tau)\,\varphi_i^{(k)}(\tau)=n_k(\tau) \tag{16}$$

имеем

$$u_j^{(1)}(\tau,\, a,\, \theta,\, p\varphi+\psi)=$$

$$=\sum_{n,m}\sum_{k=1}^{N}\varphi_j^{(k)}(\tau)\,\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} g_{nm}^{(i1)}(\tau,\, a)\,\varphi_i^{(k)}(\tau)\,e^{i\{n\theta+m(p\varphi+\psi)\}}}{m_k\left[\omega_k^2(\tau)-(\omega_1(\tau)\,m+\nu(\tau)\,n)^2\right]-n_k\left[e^{-i\gamma_2\omega_k}-e^{-i\gamma_2(\omega_1 m+\nu n)}\right]}. \tag{17}$$

При $k=1$ и условий $\omega_k^2-(m_1\omega_1-n\nu)=0$ или эквивалентном ему условии $(m\pm 1)\,p+nq=0$ периодические функции $u_j^{(1)}(\tau,\, a,\, \theta,\, p\varphi+\psi)$ не будут конечными. Поэтому в (17) должны отсутствовать члены, знаменатели которых могут обратиться в нуль.

В результате после ряда преобразований находим:

$$u_j^{(1)}(\tau,\, \theta,\, a,\, p\varphi+\psi)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{\substack{r,m\\ [nq+(m\pm 1)p\neq 0 \text{ для } k=1]}}\sum_{k=1}^{N}\varphi_i^{(k)}(\tau)\times$$

$$\times\frac{e^{i\{n\theta+m(p\varphi+\psi)\}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum\limits_{j=0}^{N} Q_{j0}^{(1)}(\tau)\,e^{-i\{n\theta+m(p\varphi+\psi)\}}\varphi_j^{(1)}(\tau)\,d\theta\, d(p\varphi+\psi)}{m_k\left[\omega_k^2(\tau)-(\omega_1(\tau)\,m+\nu(\tau)\,n)^2\right]+n_k\left[e^{-i\gamma_2(n\nu+m\omega_1)}-e^{-i\gamma_2\omega_k}\right]}-$$

$$-\sum_{k=2}^{N}\frac{\sum\limits_{j=1}^{N}\left[-2a\omega_1(\tau)\,a_{ij}(\tau)\cdot\dfrac{d\varphi_i^{(1)}(\tau)}{d\tau}\,\varphi_j^{(k)}(\tau)\sin(p\varphi+\psi)-\right. \left.-\gamma_2(\tau)\,ac_{ij}(\tau)\,\dfrac{d\varphi_i^{(1)}(\tau)}{d\tau}\,\varphi_j^{(k)}(\tau)\cos(p\varphi+\psi-\gamma_2\omega_1)\right]}{m_k\left[(\omega_k^2(\tau)-\omega_1^2(\tau)\right]+n_k\left[e^{-i\gamma_2\omega_1}-e^{-i\gamma_2\omega_k}\right]}. \tag{18}$$

После ряда выкладок для определения A_1 и B_1 получаем систему уравнений:

$$m_1(\tau)\left[\left(\omega_1(\tau)-\frac{p}{q}\,\nu(\tau)\right)\frac{\partial A_1}{\partial\psi}-2a\omega_1(\tau)\,B_1\right]+n(\tau)\,\gamma_2(\tau)\left[\left[-A_1-\frac{\gamma_2(\tau)}{2}\times\right.\right.$$

$$\left.\times\left(\omega_1(\tau)-\frac{p}{q}\,\nu(\tau)\right)\frac{\partial A_1}{\partial\psi}\right]\cos\gamma_2\omega_1+a\left[-B_1+\frac{\gamma_2(\tau)}{2}\left(\omega_1(\tau)-\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{p}{q}\,\nu(\tau)\,\frac{\partial B_1}{\partial\psi}\right]\sin\gamma_2\omega_1\right]=-\varphi_j^{(1)}(\tau)\left[M_1\gamma_1(\tau)+M_2\gamma_2(\tau)\right]+\sum_{\sigma}e^{i\sigma q\psi}I_{1\sigma},$$

$$m_1(\tau)\left[2\omega_1(\tau)\,A_1+a\left(\omega_1(\tau)-\frac{p}{q}\,\nu(\tau)\right)\frac{\partial B_1}{\partial\psi}\right]-n_1(\tau)\,\gamma_2(\tau)\left[\left[-A_1+\frac{\gamma_2(\tau)}{2}\times\right.\right.$$

$$\left.\times\left(\omega_1(\tau)-\frac{p}{q}\,\nu(\tau)\right)\frac{\partial A_1}{\partial\psi}\right]\sin\gamma_2\omega_1-a\left[-B_1+\frac{\gamma_2(\tau)}{2}\left(\omega_1(\tau)-\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{p}{q}\,\nu(\tau)\right)\frac{\partial B_1}{\partial\psi}\right]\cos\gamma_2\omega_1\right]=\varphi_j^{(1)}(\tau)\left[M_3\gamma_1(\tau)+M_4\gamma_2(\tau)\right]+\varphi_j^{(1)}(\tau)\times$$

$$\times\left[-2a\omega_1(\tau)\frac{d\varphi_i^{(1)}(\tau)}{d\tau}a_{ij}(\tau)-a\frac{d\omega_1(\tau)}{d\tau}\varphi_i^{(1)}(\tau)a_{ij}(\tau)-\varphi_i^{(1)}(\tau)a\omega_1(\tau)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{da_{ij}(\tau)}{d\tau}\right]-\sum_{\sigma}e^{i\sigma q\psi}I_{2\sigma}, \tag{19}$$

где

$$I_{1\sigma}=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^{(1)}(\tau)Q_{j0}^{(1)}(\tau,a,\theta,p\varphi+\psi)e^{-i\sigma q\psi}\cos(p\varphi+\psi)\,d\theta d\,(p\varphi+\psi),$$

$$I_{2\sigma}=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^{(1)}(\tau)Q_{j0}^{(1)}(\tau,a,\theta,p\varphi+\psi)e^{-i\sigma q\psi}\sin(p\varphi+\varphi)\,d\theta\,(p\varphi+\psi).$$

Решая систему (19) относительно A_1 и B_1, находим:

$$A_1=-\frac{a\left[h_3\frac{d[m_1(\tau)\omega_1(\tau)]}{d\tau}-\gamma_2(\tau)h_4[M_1\gamma_1(\tau)+M_2\gamma_2(\tau)]\varphi_j^{(1)}(\tau)-h_3[M_3\gamma_1(\tau)+M_4\gamma_2(\tau)]\varphi_j^{(1)}(\varepsilon)\right]}{[(\gamma_2(\tau)\,h_6)^2+h_7^2]\,h_5}+$$

$$+\sum_{\sigma}\frac{I_{1\sigma}(ih_1\sigma q-\gamma_2(\tau)h_4)+I_{2\sigma}(ih_2\gamma_2(\tau)\sigma q-h_3)}{[(i\sigma q-\gamma_2h_6)^2+h_7^2]\,h_5}e^{i\sigma q\psi},$$

$$B_1=\frac{\gamma_2(\tau)h_4\frac{d[m_1(\tau)\omega_1(\tau)]}{d\tau}+h_3\varphi_j^{(1)}(\tau)[M_1\gamma_1(\tau)+M_2\gamma_2(\tau)]-h_4\gamma_2(\tau)\varphi_j^{(1)}(\tau)[M_3\gamma_1(\tau)+M_4\gamma_2(\tau)]}{h_5[(\gamma_2(\tau)h_6)^2+h_7^2]}+$$

$$+\sum_{\sigma}\frac{I_{1\sigma}[\gamma_2(\tau)h_2i\sigma q-h_3+\gamma_2(\tau)h_4(1-i)]+I_2[-h_1i\sigma q+\gamma_2(\tau)h_4]}{ah_5[(i\sigma q-\gamma_2h_6)^2+h_7^2]}e^{i\sigma q\psi},$$

где введены обозначения:

$$h_1=\left(\omega_1(\tau)-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right)\left(m_1+n_1(\tau)\frac{\gamma_2^2(\tau)}{2}\cos\gamma_2\cdot\omega_1\right),\quad h_2=\left(\omega_1(\tau)-\right.$$

$$\left.-\frac{p}{q}\nu(\tau)\right)\frac{n_1}{2}\sin\gamma_2\omega_1\cdot\gamma_2(\tau),\quad h_3=2\omega_1(\tau)m_1(\tau)+n_1(\tau)\gamma_2(\tau)\sin\gamma_2\omega_1,$$

$$h_4=n_1(\tau)\cos\gamma_2\omega_1,\quad h_5=h_1^2+\gamma_2^2(\tau)h_2^2,\quad h_6=\frac{h_2h_3+h_1h_4}{h_5},$$

$$h_7=\frac{\gamma_2^2(\tau)h_2h_4-h_1h_3}{h_5}.$$

Аналогичным образом можно определить величины A_2, B_2, u_2 и т. д.

После определения функций A_i, B_i, u_i задача сводится к интегрированию и исследованию двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта задача намного проще исходной, поскольку уравнения (7) не содержат запаздываний аргумента. Запаздывания войдут в уравнения как параметры. Это позволяет исследовать влияние этих параметров на характер колебательного процесса.

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М. : Наука, 1974. 501 с.
2. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М. : Наука, 1964. 431 с.
3. Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И. Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием. Киев : Вища школа, 1979. 247 с.
4. Фодчук В. И. О построении асимптотических решений для нестационарных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и с малым параметром.— Укр. мат. журн., 1962, № 4, с. 435—440.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
20.03.1980 г.