УДК 517.948.34

О. Д. Нуржанов, А. Т. Алымбаев

Численно-аналитический метод исследования автономных систем интегро-дифференциальных уравнений

1. В работе [1] численно-аналитический метод [2] распространен на автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Данная работа посвящена обобщению этого метода для автономных систем интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(x(t), \int\limits_{t}^{t+\tau} \varphi(t-s, x(s))\,ds\right), \tag{1}$$

где x, f — n-мерные векторы, φ — m-мерный вектор; вектор-функции $f(x, u)$, $\varphi(t-s, x)$ предполагаются определенными и непрерывными в области

$$-\infty < t,\ s < +\infty,\ x \in \Delta,\ u \in \Delta_1, \tag{2}$$

Δ, Δ_1 — ограниченные замкнутые области евклидовых пространств, соответственно E_n и E_m; τ — некоторая фиксированная постоянная.

Заметим, что для неавтономных периодических систем интегродифференциальных уравнений вида (1) численно-аналитический метод применялся в работе [3].

Пусть функции $f(x, u)$ и $\varphi(t-s, x)$ ограничены и удовлетворяют по x и u условию Липшица в области (2) и система уравнений (1) имеет периодическое периода $T = \frac{2\pi}{\omega}$ решение. Через $|x|$ обозначим вектор с компонентами $|x_i|$, а через $\|x\|$ — норму вектора x, равную $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.

Так как мы ищем периодическое периода $T = \frac{2\pi}{\omega}$ решение системы уравнений (1), то, не умаляя общности, будем считать, что $0 \leqslant \tau \leqslant T$.

Пусть A — постоянная действительная $m \times m$-мерная матрица такая, что все ее собственные значения имеют простые элементарные делители, являются чисто мнимыми и целые кратные некоторому положительному числу σ. При помощи этой матрицы в системе (1) произведем преобразование переменных

$$\bar{x} = e^{A\theta}\bar{y},\ \bar{\bar{x}} = \bar{\bar{y}},\ \theta = \omega t, \tag{3}$$

где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — m-мерные векторы, имеющие соответственно компоненты x_i, y_i $(i = 1, \ldots, m)$; $2 \leqslant m \leqslant n$, а $\bar{\bar{x}}$ и $\bar{\bar{y}}$ — $(n-m)$-мерные векторы, имеющие соответственно компоненты x_α, y_α ($\alpha = m+1, \ldots, n$). Тогда исходная система (1) относительно новых переменных имеет вид

$$\frac{dy(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{\omega} Y\left(\theta, y(\theta), \frac{1}{\omega}\int_{\theta}^{\theta+\tau\omega} \Psi(\theta, \nu, y(\nu))\, d\nu\right), \tag{4}$$

где $y = \operatorname{col}(\bar{y}, \bar{\bar{y}})$ — n-мерный вектор; а через $Y(\theta, y, v)$ обозначена n-мерная вектор-функция

$$Y(\theta, y, v) = \left\| \begin{matrix} e^{-A\theta} f^1\left(e^{A\theta}\bar{y}, \bar{\bar{y}}, \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_{\theta}^{\theta+\tau\omega} \varphi\left(\dfrac{\theta-\nu}{\omega}, e^{A\nu}\bar{y}(\nu), \bar{\bar{y}}(\nu)\right) d\nu\right) - A\omega\bar{y} \\ f^2\left(e^{A\theta}\bar{y}, \bar{\bar{y}}, \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_{\theta}^{\theta+\tau\omega} \varphi\left(\dfrac{\theta-\nu}{\omega}, e^{A\nu}\bar{y}(\nu), \bar{\bar{y}}(\nu)\right) d\nu\right) \end{matrix} \right\|. \tag{5}$$

В силу непрерывности преобразований (3), области изменения Δ и Δ_1 переменных x и u преобразуются в замкнутые и ограниченные области D и D_1 изменения переменных y и v.

Поскольку по предположению функции $f(x, u)$ и $\varphi(t-s, x)$ ограничены, непрерывны и удовлетворяют условию Липшица, то вектор-функции $Y(\theta, y, v)$ и $\Psi(\theta, \nu, y)$ также будут удовлетворять этому условию, т. е. имеют место неравенства:

$$|Y(\theta, y, v)| \leqslant M, \quad |\Psi(\theta, \nu, y)| \leqslant N, \; |Y(\theta, y', v') - Y(\theta, y'', v'')| \leqslant$$
$$\leqslant K_1 |y' - y''| + K_2 |v' - v''|, \tag{6}$$

$$|\Psi(\theta, \nu, y') - \Psi(\theta, \nu, y'')| \leqslant K_3 |y' - y''|, \tag{7}$$

где k_1, k_2 и k_3 — неотрицательные постоянные матрицы в области

$$-\infty < \theta, \; \nu < +\infty, \; y, y', y'' \in D, \; v, v', v'' \in D_1. \tag{8}$$

Таким образом, вопрос существования и построения периодических по t с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$ решений системы интегро-дифференциальных уравнений вида (1) сводится к вопросу существования и построения периодических по θ с периодом 2π решений системы интегро-дифференциальных уравнений (4).

Через D_ω обозначим множество точек $y_0 \in E_n$, содержащихся в D вместе со своей $\frac{\pi}{\omega} M$-окрестностью. Пусть

$$D_\omega \neq \varnothing. \tag{9}$$

Предположим также, что наибольшее собственное число матрицы $Q = \frac{2\pi}{3\omega}\left[K_1 + \frac{3\tau}{2} K_2 K_3\right]$ не превышает единицы

$$\lambda_{\max} < 1. \tag{10}$$

Очевидно, что если некоторое значение ω^* удовлетворяет соотношениям (9) и (10), то этим соотношениям удовлетворяет и любое значение $\omega \geqslant \omega^*$. Через Ω обозначим точную нижнюю границу множества ω, удовлетворяющего соотношениям (9) и (10).

Вектор-функции $Y(\theta, y, v)$ и $\Psi(\theta, \nu, y)$ явно зависят от θ и периодичны по θ с периодом 2π. Поэтому, если существует преобразование (3) такое, что преобразованная система (4) удовлетворяет условиям (6), (7), (9) и (10) при $\omega > \Omega$, то согласно [2] она является 2π-системой.

Следовательно, последовательность периодических по θ с периодом 2π функций

$$y_m(\theta, y_0, \omega) = y_0 + \frac{1}{\omega}\int_0^{\theta}\left\{Y\left(\theta, y_{m-1}(\theta, y_0, \omega), \frac{1}{\omega}\int_{\theta}^{\theta+\tau\omega}\Psi(\theta, \nu, y_{m-1}\times\right.\right.$$

$$\left.\times(\nu, y_0, \omega))\,d\nu\right) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Y\left(s, y_{m-1}(s, y_0, \omega),\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{\omega}\int_s^{s+\tau\omega}\Psi(s, \nu, y_{m-1}(\nu, y_0, \omega))\,d\nu\right)ds\right\}d\theta, \qquad (11)$$

где y_0 — некоторая точка области D_ω, при $m\to\infty$ сходится равномерно относительно

$$(\theta, y_0, \omega)\in I\times D_\omega\times I_\omega, \quad I=(-\infty, +\infty), \quad I_\omega=(\omega:\omega>\Omega), \qquad (12)$$

к функции $y^0(\theta, y_0, \omega)$, определенной в области (12), периодической по θ с периодом 2π. Кроме того, функция $y^0(\theta, y_0, \omega)$ удовлетворяет системе уравнений

$$y(\theta, y_0, \omega) = y_0 + \frac{1}{\omega}\int_0^{\theta}\left\{Y\left(\theta, y(\theta, y_0, \omega),\right.\right.$$

$$\left.\frac{1}{\omega}\int_{\theta}^{\theta+\tau\omega}\Psi(\theta, \nu, y(\nu, y_0, \omega))\,d\nu\right) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Y\left(s, y(s, y_0, \omega),\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{\omega}\int_s^{s+\tau\omega}\Psi(s, \nu, y(\nu, y_0, \omega))\,d\nu\right)ds\right\}d\theta, \qquad (13)$$

причем справедлива оценка

$$|y^0(\theta, y_0, \omega) - y_m(\theta, y_0, \omega)| \leqslant \frac{\pi}{\omega}q_m M, \qquad (14)$$

для всех θ, y_0 и ω из области (12), где $q_m = Q^m(E-Q)^{-1}$.

2. Рассмотрим теперь вопрос существования периодических решений $\frac{2\pi}{\omega}$-системы вида (4). Через D_ω^{n-1} обозначим множество n — 1-мерных векторов $y_0^* = (y_{01}, \ldots, y_{0n-1})$ таких, что $y_0 = (y_0^*, y_{0n})$ принадлежит D_ω. Обозначим через $\Delta(y_0, \omega)$ вектор-функции

$$\Delta(y_0, \omega) = \frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}Y\left(\theta, y^0(\theta, y_0, \omega), \frac{1}{\omega}\int_{\theta}^{\theta+\tau\omega}\Psi(\theta, \nu, y^0(\nu, y_0, \omega)\right), \qquad (15)$$

где $y^0(\theta, y_0, \omega)$ — предел последовательности периодических функций $y_m(\theta, y_0, \omega)$, определяемых согласно (11). Свойство этой функции определяет следующая лемма.

Лемма. *Вектор-функция $\Delta(y_0, \omega)$ определена, непрерывна в области $(y_0, \omega)\in D_\omega\times I_\omega$ и удовлетворяет неравенствам*

$$|\Delta(y_0, \omega)| \leqslant \frac{M}{\omega}, \quad |\Delta(y_0^1, \omega^1) - \Delta(y_0^2, \omega^2)| \leqslant \overline{\overline{K}}[E + \overline{\overline{K}}\pi +$$

$$+ \overline{\overline{K}}\pi Q_2(E-Q_2)^{-1}]\,|y_0^1 - y_0^2| + \frac{M + 2\omega_1\tau K_2 N}{\omega_1\omega_2}\times$$

$$\times [E + K\pi + K\pi Q_2 (E - Q_2)^{-1}] \, | \omega_1 - \omega_2 |, \tag{16}$$

где $\overline{\overline{K}} = \dfrac{K_1 + K_2 K_3 \tau}{\omega_2}$, $\quad Q_2 = \dfrac{2\pi}{3\omega_2}\left(K_1 + \dfrac{3}{2} K_2 K_3 \tau\right)$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству соответствующей леммы из [1].

Из уравнения (13) видно, что всякое его решение, для которого $\Delta(y_0, \omega) = 0$, является периодическим решением системы (4) таким, что $y(0, y_0, \omega) = y_0$.

Поэтому вопрос существования периодического периода 2π решения системы (4) однозначно связан с вопросом существования нулей функции $\Delta(y_0, \omega)$, имеющей вид (15). Но в силу автономности первоначальной системы (1), можем заранее задать одну из компонент вектора $x_0 \in \Delta_\omega$ (см. [1]) и, следовательно, вектора $y_0 \in D_\omega$. Не нарушая общности задачи, предположим, что компонента y_{0n} известна. В n-мерном пространстве рассмотрим непрерывное отображение

$$\Delta : D_\omega^{n-1} \times I_\omega \to E_n, \ \Delta(y_0^*, \omega) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} Y \Bigg(\theta, \, y^0(\theta, \, y_0, \, \omega),$$

$$\frac{1}{\omega} \int_\theta^{\theta+\tau\omega} \Psi(\theta, \, \nu, \, y^0(\nu, \, y_0, \, \omega)) \, d\nu \Bigg) d\theta. \tag{17}$$

Имеем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть для системы* (4), *заданной в области*

$$-\infty < \theta, \ \nu < +\infty, \ y \in D, \ v \in D_1, \tag{18}$$

выполняются условия (6), (7), (9) *и* (10). Кроме того, *предположим, что*

1) *отображение* $\Delta_m(y_0^*, \omega)$ имеет изолированную особую точку

$$\Delta_m(\bar{y}_0^*, \bar{\omega}) = 0; \tag{19}$$

2) *индекс этой особой точки отличен от нуля;*

3) *существует замкнутая выпуклая область* $\overset{(1)}{D}{}_\omega^{n-1} \times I_\omega^{(1)}$, *принадлежащая* $D_\omega^{n-1} \times I_\omega$ *и имеющая* $(\bar{y}_0^*, \bar{\omega})$ *единственной особой точкой, такая, что на ее границе* $\Gamma_{\overset{(1)}{D}{}_\omega^{n-1} \times I_\omega^{(1)}}$ *выполняется неравенство*

$$\inf_{(\bar{y}_0^*, \bar{\omega}) \in \Gamma_{\overset{(1)}{D}{}_\omega^{n-1} \times I_\omega^{(1)}}} | \Delta_m(\bar{y}_0^*, \bar{\omega}) | \geqslant \frac{1}{\omega} Q^{m+1} (E - Q)^{-1} M. \tag{20}$$

Тогда система (4) *имеет периодическое решение, для которого* $y_0 \in D_\omega$.

В общем случае отыскание начальных значений y_0 и неизвестного параметра ω периодических решений 2π-системы следует производить численным методом. Для этого можем использовать свойство вектор-функции $\Delta(y_0, \omega)$, выраженной теоремой.

Теорема 2. *Пусть в области* (18) *задана система* (4), *удовлетворяющая* (6), (7), (9) *и* (10). *Предположим, что существует замкнутая область*

$$\overset{(1)}{D}{}_\omega^{n-1} \times I_\omega^{(1)} \cap \{y_n = y_{0n}\} \subset D_\omega \times I_\omega. \tag{21}$$

Тогда, для того, чтобы в этой области существовала точка (y_0^*, ω^*), *для которой* $\Delta(y_0^*, \omega^*) = 0$, *необходимо, чтобы для всех целых* m *и любого*

$(y_0', \omega') \in \overset{(1)}{D}{}_{\omega}^{n-1} \times I_{\omega}^{(1)} \cap \{y_n = y_{0n}\}$ *выполнялось неравенство*

$$|\Delta_m(y_0', \omega')| \leqslant \sup \Big\{ \overline{K}[E + \overline{K}\pi + \overline{K}\pi Q_1 (E - Q_1)^{-1}] \, |y_0' - y_0| + \\ + \frac{M + 2\omega\tau K_2 N}{\omega\omega'} \times [E + \overline{K}\pi + \overline{K}\pi Q_1 (E - Q_1)^{-1}] \, |\omega - \omega'| + \\ + \frac{1}{\omega'} Q_1^{m+1} (E - Q_1)^{-1} M \Big\}, \tag{22}$$

где $Q_1 = \frac{2\pi}{3\omega'}\left[E + \frac{3\tau}{2} K_2 K_3\right]$, $\overline{K} = \frac{K_1 + K_2 K_3 \tau}{\omega'}$.

Доказательство этих теорем аналогично доказательству соответствующих теорем в [2].

Задачу нахождения периодических решений некоторого класса автономных систем интегро-дифференциальных уравнений можно свести к определению периодических решений неавтономных систем интегро-дифференциальных уравнений вида (4), в котором применима вышеизложенная теория.

Рассмотрим систему автономных интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= g\left(v, \varphi, \psi, \int_t^{t+\tau} P(t - s, v(s), \varphi(s), \psi(s))\, ds, \varepsilon\right), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= A\varphi + \varepsilon f\left(v, \varphi, \psi, \int_t^{t+\tau} P(t - s, v(s), \varphi(s), \psi(s))\, ds, \varepsilon\right), \\ \frac{d\psi}{dt} &= B\psi + \varepsilon h\left(v, \varphi, \psi, \int_t^{t+\tau} P(t - s, v(s), \varphi(s), \psi(s))\, ds, \varepsilon\right), \end{aligned} \tag{23}$$

где ε — малый параметр, v и g — m-мерные векторы, φ и f — l-мерные векторы, ψ и h — n-мерные векторы, P — k-мерный вектор, A — $l \times l$-мерная матрица, для которой каждое решение уравнения $\frac{d\varphi}{dt} = A\varphi$ — периодическое с общим периодом $T_1 = \frac{2\pi}{\nu}$, B — $n \times n$-мерная матрица такая, что уравнение $\frac{d\psi}{dt} = B\psi$ не имеет периодических решений кроме $\psi = 0$.

Произведем теперь преобразование переменных

$$v = x, \quad \varphi = e^{A\frac{\omega}{\nu}t} y, \quad \psi = z. \tag{24}$$

В новых переменных система (23) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X\left(t, x, y, z, \int_t^{t+\tau} \Phi(t, s, x(s), y(s), z(s))\, ds, \varepsilon\right), \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon Y\left(t, x, y, z, \int_t^{t+\tau} \Phi(t, s, x(s), y(s), z(s))\, ds, \beta, \varepsilon\right), \\ \frac{dz}{dt} &= Bz + \varepsilon Z\left(t, x, y, z, \int_t^{t+\tau} \Phi(t, s, x(s), y(s), z(s))\, ds, \varepsilon\right), \end{aligned} \tag{25}$$

где $\omega=\nu+\varepsilon\beta$,

$$X=g\left(x,\ e^{A\frac{\omega}{\nu}t}y,\ z,\ \int\limits_t^{t+\tau}P\left(t-s,\ x(s),\ e^{A\frac{\omega}{\nu}s}y(s),\ z(s)\right)ds,\ \varepsilon\right),$$

$$Y=-\frac{\beta}{n}Ay+e^{-A\frac{\omega}{\nu}t}f\left(x,\ e^{A\frac{\omega}{\nu}t}y,\ z,\ \int\limits_t^{t+\tau}P\left(t-s,\ x(s),\ e^{A\frac{\omega}{\nu}s}y(s),\ z(s)\right)ds,\ \varepsilon\right),$$

$$Z=h\left(x,\ e^{A\frac{\omega}{\nu}t}y,\ z,\ \int\limits_t^{t+\tau}P\left(t-s,\ x(s),\ e^{A\frac{\omega}{\nu}s}y(s),\ z(s)\right)ds,\ \varepsilon\right).$$

Имеем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть система* (25) *при* $\varepsilon=0$ *является* $\frac{2\pi}{\nu}$ = *системой и имеет периодическое по* t *с периодом* $\frac{2\pi}{\nu}$ *решение* $x=x(t,x_0,y_0,0)$, $y=y_0$, $z=0$. *Положим*

$$\overline{X}=\frac{\nu}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\nu}X\left(t,\ x(t,x_0,y_0,0),\ y_0,\ 0,\ \int\limits_t^{t+\tau}\Phi(t,s,x(s,x_0,y_0,0),y_0,0)\,ds,\ 0\right)dt,$$

$$\overline{Y}=\frac{\nu}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\nu}Y\left(t,\ x(t,x_0,y_0,0),\ y_0,\ 0,\ \int\limits_t^{t+\tau}\Phi(t,s,x(s,x_0,y_0,0),y_0,0)\,ds,\ \beta_0,\ 0\right)dt,$$

$$\overline{Z}=\frac{\nu}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\nu}Z\left(t,\ x(t,x_0,y_0,0),\ y_0,\ 0,\ \int\limits_t^{t+\tau}\Phi(t,s,x(s,x_0,y_0,0),y_0,0)\,ds,\ 0\right)dt.$$

Если существуют векторы $x_0=(x_{01},\ldots,x_{0m})$, $y_0^*=(y_{01},\ldots,y_{0l-1})$ *и скаляр* β, *такие что*

$$X\left(t,\ x(t,x_0,y_0,0)\,y_0,\ 0,\ \int\limits_t^{t+\tau}\Phi(t,s,x(s,x_0,y_0,0),y_0,0)\,ds,\ 0\right)=0,$$

$$Y\left(t,\ x(t,x_0,y_0,0),\ y_0,\ 0,\ \int\limits_t^{t+\tau}\Phi(t,s,x(s,x_0,y_0,0),y_0,0)\,ds,\ \beta_0,\ 0\right)=0,$$

$$\frac{D(\overline{X},\overline{Y})}{D(x_0,y_0^*,\beta_0)}\neq 0,$$

тогда при достаточно малых ε *система* (25) *будет* $\frac{2\pi}{\omega}$-*системой и имеет периодическое с периодом* $\frac{2\pi}{\omega}$ *решение* $x(t)=x(t,x_0(\varepsilon),y_0(\varepsilon),z_0(\varepsilon),\varepsilon)$, $y(t)=y(t,x_0(\varepsilon),y_0(\varepsilon),z_0(\varepsilon),\varepsilon)$, $z(t)=z(t,x_0(\varepsilon),y_0(\varepsilon),z_0(\varepsilon),\varepsilon)$, *такое, что при* $\varepsilon=0$ *обращается в решение вырожденной системы.*

Доказательство этой теоремы проводится точно так, как и теоремы 3 в работе [1].

В качестве примера рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля вида

$$\dot{x}_1=x_2,\qquad \dot{x}_2=-\nu^2x_1+\varepsilon(1-x_1^2)x_2+\varepsilon\int\limits_t^{t+\frac{\pi}{\omega}}x_2(s)\,ds,\tag{26}$$

где x_1, x_2 лежит в области $|x_1|\leqslant a$, $|x_2|\leqslant b$, а $\omega=\nu+\varepsilon\beta$.

Преобразованием $x = e^{\frac{A\omega}{\nu}t} y$ систему (26) приведем к виду

$$\dot{y}_1 = -\frac{\varepsilon}{\nu}\left\{\beta x_2 \cos\omega t + \left[\nu\beta x_1 + (1 - x_1^2) x_2 + \int\limits_t^{t+\frac{\pi}{\omega}} x_2(s)\,ds\right]\sin\omega t\right\},$$
$$\dot{y}_2 = \frac{\varepsilon}{\nu}\left\{-\beta x_2 \sin\omega t + \left[\nu\beta x_1 + (1 - x_1^2) x_2 + \int\limits_t^{t+\frac{\pi}{\omega}} x_2(s)\,ds\right]\cos\omega t\right\}, \quad (27)$$

где

$$|y_1| \leqslant a + \frac{b}{\nu}, \qquad |y_2| \leqslant a + \frac{b}{\nu}, \quad (28)$$

причем

$$M = \left\| \begin{matrix} |\beta| b + \nu|\beta| a + (1 + a^2) b + \frac{\pi}{\omega} b \\ |\beta| b + \nu|\beta| a + (1 + a^2) b + \frac{\pi}{\omega} b \end{matrix} \right\|; \qquad N = \left\| \begin{matrix} 0 \\ b \end{matrix} \right\|,$$

$$K_1 = \left\| \begin{matrix} \nu|\beta| + 2ab|\beta| + 1 + a^2 \\ \nu|\beta| + 2ab|\beta| + 1 + a^2 \end{matrix} \right\|; \quad K_2 = \left\| \begin{matrix} 0 & \frac{\varepsilon}{\nu} \\ 0 & \frac{\varepsilon}{\nu} \end{matrix} \right\|; \quad K_3 = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

При достаточно малых ε условия (9), (10) всегда выполняются, следовательно, система (27), определенная в области (28), является $\frac{2\pi}{\omega}$-системой при всех $\omega > 0$.

По схеме, изложенной выше, в первом приближении определяем начальное значение y_{10} и поправку β из системы

$$2y_{20}\left[\beta - \frac{1}{\omega}\right] + y_{10}\left[\frac{y_{10}^2}{4} + \frac{y_{20}^2}{4} - 1\right] = 0,$$
$$2y_{10}\left[\beta - \frac{1}{\omega}\right] + y_{20}\left[1 - \frac{y_{10}^2}{4} - \frac{y_{20}^2}{4}\right] = 0. \quad (29)$$

Считая y_{20} заданным, принимаем $y_{20} = 0$ и получаем из (29), что $y_{20} = 0$, $y_{10} = 2$, $\beta = \frac{1}{\nu}$, $\omega = \nu + \frac{\varepsilon}{\nu}$. Кроме того,

$$\left|\frac{D(\bar{f}_1, \bar{f}_2)}{D(y_{10}, \beta)}\right| = 12.$$

Отсюда следует, что в первом приближении периодическое решение системы (26) имеет вид $x_1 = 2\cos\left(\nu + \frac{\varepsilon}{\nu}\right)t$, $x_2 = -2\nu\sin\left(\nu + \frac{\varepsilon}{\nu}\right)t$.

1. Ле Лыонг Тай. Численно-аналитический метод исследования автономных систем дифференциальных уравнений.— Укр. мат. журн., 1978, 30, № 3, с. 309—317.
2. Самойленко А. М., Ронто Н. И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. К.: Вища школа, 1976. 180 с.

3. Н у р ж а н о в О. Д. Численно-аналитический метод исследования нелинейных периодических систем одного класса интегро-дифференциальных уравнений.— Мат. физика, К.: Наук. думка, 1977, вып. 22, с. 22—30.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
20.03.1980 г.