УДК 519.41/47

А. Н. Ткаченко

О локально нормальных группах с дополняемыми нормальными подгруппами

Настоящая заметка посвящена локально нормальным группам, все нормальные подгруппы которых имеют дополнения. Задача о таком классе групп предложена автору С. Н. Черниковым. Согласно терминологии принятой в работе [1], группы с дополняемыми нормальными подгруппами назовем нормализуемыми. В литературе встречаются и другие названия: нормально факторизуемые, пС-, пК-группы.

В работе установлено, что нормализуемые локально нормальные группы исчерпываются всевозможными подпрямыми произведениями конечных нормализуемых групп, а класс нормализуемых локально нормальных групп замкнут относительно нормальных делителей. В основу обоих результатов положена следующая лемма.

Лемма. *Подпрямое произведение G любого множества произвольных нормализуемых групп G_α, $0 \leqslant \alpha < \gamma$, нормализуемо.*

Доказательство. Пусть $H = \underset{0\leqslant\alpha<\gamma}{X} G_\alpha$, $H_0 = \langle 1 \rangle$ и $H_\beta = \underset{\alpha<\beta}{X} G_\alpha$ для всех отличных от нуля порядковых номеров $\beta \leqslant \gamma$. Возьмем теперь в группе G произвольную нормальную подгруппу N и покажем, что последняя дополняема в группе H_γ. Так как подгруппа $NH_\alpha \cap G_\alpha$ нормальна в множителе G_α, то по условию для всех $\alpha < \gamma$ имеет место разложение

$$G_\alpha = (NH_\alpha \cap G_\alpha) \leftthreetimes K_\alpha. \qquad (1)$$

Введем следующие обозначения: $T_0 = \langle 1 \rangle$ и $T_\beta = \underset{\alpha<\beta}{X} K_\alpha$ для $0 < \beta \leqslant \gamma$. Покажем, что подгруппа $T = T_\gamma$ — дополнение подгруппы N в группе H_γ. Для этого воспользуемся индукцией по β. Нетрудно видеть, что доказательство сводится к проверке соотношений

$$H_\beta \leqslant TN, \quad N \cap T_\beta = \langle 1 \rangle \tag{2}$$

для каждого $\beta \leqslant \gamma$. Для $\beta = 0$ эти соотношения очевидны, пусть они верны для всех $\beta < \delta$. Если δ предельное число, то с учетом соотношений $H_\delta = \bigcup_{\beta<\delta} H_\beta$, $T_\delta = \bigcup_{\beta<\delta} T_\beta$ получаем, что соотношения (2) имеют место и при $\beta = \delta$. Если же δ непредельное, что $H_\delta = H_{\delta-1} \times G_{\delta-1}$, $T_\delta = T_{\delta-1} \times K_{\delta-1}$. Используя соотношение (1), имеем: $G_{\delta-1} = (NH_{\delta-1} \cap G_{\delta-1}) K_{\delta-1} \leqslant NT$, так как $K_{\delta-1} \leqslant T$ и $H_{\delta-1} \leqslant NT$ по предложению индукции. Поэтому $H_\delta = H_{\delta-1} \times G_{\delta-1} \leqslant NT$ и первое соотношение из (2) справедливо при $\beta = \delta$. Кроме того, для пересечения $N \cap T_\beta$ имеют место следующие включения: $N \cap T_\delta \leqslant NT_{\delta-1} \cap KT_{\delta-1} \leqslant T_{\delta-1}.\ (NH_{\delta-1} \cap G_{\delta-1} \cap K_{\delta-1})$ так как $T_{\delta-1} \leqslant H_{\delta-1}$. Выражение в последних скобках в силу (1) — единичная подгруппа, значит $N \cap T_\delta \leqslant T_{\delta-1}$ и поэтому, как показывает предположение индукции $N \cap T_\delta \leqslant N \cap T_{\delta-1} = \langle 1 \rangle$. Таким образом, и второе соотношение из (2) выполняется при $\beta = \delta$.

При $\beta = \gamma$ соотношения (2) показывают, что подгруппа N дополняема в группе H_γ, отсюда следует и ее дополняемость в группе G. Ввиду произвольности нормального делителя N группа G нормализуема. Лемма доказана.

Применяя полученную лемму к локально нормальным группам, доказываем два следующих утверждения.

Теорема 1. *Локально нормальная группа G тогда и только тогда нормализуема, когда она является подпрямым произведением конечных нормализуемых групп.*

Доказательство. Достаточность теоремы вытекает из леммы. Необходимость установим следующим образом. Пусть локально нормальная группа G нормализуема. Тогда $G = Z(G) \times G_1$. Подгруппа G_1, как локально нормальная группа без центра, в силу известного результата [3] — подпрямое произведение своих конечных гомоморфных образов. Последние, будучи гомоморфными образами группы G, нормализуемы. Нормализуем, очевидно, и центр $Z(G)$, а потому разложим в прямое произведение простых циклических групп. Отсюда заключаем, что и вся группа G — подпрямое произведение конечных нормализуемых групп. Теорема доказана.

Теорема 2. *Любая нормальная подгруппа нормализуемой локально нормальной группы также нормализуема.*

Доказательство. Пусть G — нормализуемая локально нормальная группа и N — ее нормальная подгруппа. По теореме 1 группа G — подпрямое произведение конечных нормализуемых групп G_i, $i \in I$. Проекция N_i подгруппы N на множитель G_i нормальна в G_i, а потому [2] она нормализуема. Тогда теорема 1 показывает, что подгруппа N, как подпрямое произведение своих проекций N_i, $i \in I$, также нормализуема. Теорема доказана.

1. Черников С. Н. Группы с системами дополняемых подгрупп.— Мат. сб., 1954, 39, № 3, с. 93—128.
2. Зайцев Д. И. К теории нормально факторизуемых групп.— В кн.: Группы с заданными свойствами подгрупп. К.: 1973. с. 78—104.
3. Горчаков Ю. М. Группы с конечными классами сопряженных элементов. М.: Наука, 1978. 120 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию 8.10.1979 г.,
после переработки — 16.03.1981 г.