УДК 517.55

*А. Садуллаев, П. В. Дегтярь*

# Дивизоры приближения голоморфного отображения и дефекты мероморфных функций многих переменных

Как известно ([1], см. также [2]), для мероморфной функции $f$ на комплексной плоскости $\mathbf{C}$ множество точек приближения $E_f = \{a \in P^1 : \lim\limits_{r\to\infty} m_f(r, a) = \infty\}$ имеет нулевую логарифмическую емкость. В данной работе доказывается аналог этого утверждения для голоморфного отображения $f: \mathbf{C}^n \to P^m$. Рассматриваются вопросы о дефектных функциях мероморфной функции многих комплексных переменных и о совпадении двух мероморфных функций, принимающих одинаковые функциональные значения.

**1.** Для формулировки основных результатов потребуется понятие $\mathcal{P}$-емкости, введенной в работе [3].

Рассмотрим усиленно псевдовыпуклую область $D = \{z \in P^m : \rho(z) < 0\}$, где $\rho$ — непрерывная плюрисубгармоническая функция в окрестности замыкания $\overline{D}$ (см. [4]). Для данного подмножества $E \subset D$ обозначим через $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}(E, D)$ класс плюрисубгармонических в $D$ функций $u$ таких, что $u|_D \leqslant 0$, $u|_E \leqslant -1$ и положим $\omega^*(z, E, D) = \overline{\lim\limits_{w\to z}}\, \omega(w, E, D)$, где $\omega(z, E, D) = \sup\limits_{u\in\mathfrak{Y}} u(z)$. Тогда усреднение

$$\mathcal{P}(E, D) = -\frac{1}{\mu(D)} \int\limits_D \omega^*(z, E, D)\, d\mu(z), \tag{1}$$

где $d\mu$ — элемент объема на $P^m$, называется $P$-емкостью множества $E$ относительно области $D$. Отметим, что $\mathcal{P}(E, D) = 0$ тогда и только тогда, когда $E$ — плюриполярное множество в $D$.

Определение 1. Будем говорить, что множество $E \subset P^m$ имеет внутреннюю $\mathcal{P}$-емкость-нуль, если для любой усиленно псевдовыпуклой области $D \subset P^m$ и для любого компакта $K \subset E \cap D$ емкость $\mathcal{P}(K, D) = 0$.

Лемма 1. *Если $D \subset P^m$ — усиленно псевдовыпуклая область и $u_j$ — последовательность неположительных, непрерывных плюрисубгармонических в $D$ функций, таких, что $\int\limits_D u_j d\mu \geqslant c = \mathrm{const}$, то множество $E = \{z \in D : \lim\limits_{j\to\infty} u_j(z) = -\infty\}$ имеет внутреннюю $\mathcal{P}$-емкость-нуль.*

Доказательство. Так как $u_j$ — непрерывны, то множества $E_{jq} = \{z \in D : u_j(z) \leqslant -q\}$ замкнуты в $D$, $j, q = 1, 2, \ldots$. Нетрудно доказать, что

$$E = \bigcap_{q=1}^{\infty} \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcap_{j=p}^{\infty} E_{jq}. \tag{2}$$

Если $\{K_j\}$ возрастающая последовательность компактов в $D$ такая, что $K \subset \bigcup\limits_j K_j$ также компакт, то $\omega^*(z, K, D) = \lim\limits_{j\to\infty} \omega^*(z, K_j, D)$.

Из этого результата согласно (2) следует, что если $K \subset E$ — компакт, то

$$\mathcal{P}(K, D) \leqslant \lim_{p\to\infty} \mathcal{P}\left(\bigcap_{j=p}^{\infty} (E_{jq} \cap K); D\right) \leqslant \lim_{p\to\infty} \mathcal{P}(E_{pq} \cap K, D), \quad q \geqslant 1. \qquad (3)$$

Заметим, что функция $u_p(z)/q \in \mathfrak{Y}(E_{pq}, D)$ и поэтому

$$\mathcal{P}(E_{pq}, D) = -\frac{1}{\mu(D)} \int_D \omega^*(z, E_{pq}, D)\, d\mu(z) \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{1}{\mu(D)} \int_D \frac{u_p(z)}{q}\, d\mu(z) \leqslant -\frac{c}{\mu(D)} \frac{1}{q}.$$

Из этого и неравенства (3) получаем $\mathcal{P}(K, D) \leqslant -\frac{c}{\mu(D)} \cdot \frac{1}{q} \to 0$, при $q \to \infty$.

Лемма доказана.

2. Пусть $f: N \to M$ — голоморфное отображение комплексного многообразия $N$ со специальной функцией исчерпания $\tau$ в компактное многообразие $M$, над которым имеется обильное расслоение $L \to M$ (см. [5]). Поэтому считаем, что $M$ вложено в некоторое проективное пространство $P^m$, а дивизоры расслоения $L \to M$ — гиперплоскости в $P^m$. Через $(P^m)^* = \| L \|$ обозначим проективное пространство этих гиперплоскостей. Отметим также, что в изучаемых ниже вопросах структура многообразия $N$ не играет существенной роли. Поэтому, без нарушения общности можно положить $N = \mathbf{C}^n$ с функцией исчерпания $\tau = \ln \| z \|^2$.

Введем следующие обозначения:

$$A = [a_0, a_1, \ldots, a_m] = \left\{ w = [w_0, \ldots, w_m] \in P^m : \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu w_\nu = 0 \right\} \in |L| -$$

дивизоры расслоения $L \to P^m$;

$$\| A \| = \frac{\left| \sum\limits_{\nu=0}^{m} a_\nu w_\nu \right|}{\| w \| \, \| a \|}, \text{ где } \| w \| = (| w_0 |^2 + \ldots + | w_m |^2)^{\frac{1}{2}}. \qquad (4)$$

Положим $\omega_0 = dd^c \ln \| z \|^2$ — однородная форма объема в $\mathbf{C}^n \setminus \{0\}$, $\sigma = d^c \ln \| z \|^2 \wedge \omega_0^{n-1}$ — форма объема вещественных гиперповерхностей в $\mathbf{C}^n$, где, как обычно, $d = \partial + \bar{\partial}$, $d^c = (\partial - \bar{\partial})/4\pi i$;

$$T_f(r) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{B_t} dd^c \ln \| f \|^2 \wedge \omega_0^{n-1} = \int_{S_r} \ln \| f \| \, \sigma - \ln \| f(0) \|,$$

$$N_f(r, A) = \int_0^s \frac{dt}{t} \int_{B_t \cap f^{-1}(A)} \omega_0^{n-1}, \quad m_f(r, A) = \int_{S_r} \ln \frac{1}{\| A \circ f \|} \sigma,$$

где $S_r$ — граница шара $B_r = \{ z \in \mathbf{C}^n : \| z \| < r \}$. Тогда первая основная теорема Неванлинны (см. [3]) примет вид $N_f(r, A) + m_f(r, A) = T_f(r) - \ln \| A \circ f(0) \|$.

Определение 2. Дивизор $A \in |L|$ называется дивизором приближения отображения $f: \mathbf{C}^n \to P^m$, если предел $\lim\limits_{r\to\infty} m_f(r, A) = \infty$.

Совокупность дивизоров приближения обозначим через $E_f$. В каждой координатной окрестности $U_\alpha = \{A = [a_0, a_1, \ldots, a_m] \in |L| : a_\alpha \neq 0\}$ функцию — $m_f(r, A)$ можем представить в виде

$$-m_f(r, A) = W_\alpha(r, A) + S_\alpha(A), \tag{5}$$

где $W_\alpha(r, A) = \int\limits_{S_r} \ln \left| \sum\limits_{\nu=0}^{m} a_\nu / a_\alpha f_\nu \right| / \| f \| \sigma$ — непрерывная плюрисубгармоническая функция в $U_\alpha$, а $S_\alpha(A) = \ln |a_\alpha| / \| a \|$ — суммируемая по мере $\mu$ на $|L|$ функция.

По формуле Крофтона

$$\int\limits_{|L|} W_\alpha(r, A)\, d\mu(A) = c, \tag{6}$$

где константа $c$ не зависит от $r$.

Пусть $D \subset\subset U_\alpha$ — усиленно псевдовыпуклая область и $c_1 = \min\limits_{A \in D} S_\alpha(A)$. Тогда непрерывная плюрисубгармоническая функция $W_\alpha(r, A) + c_1$ неположительна в $D$ и согласно (6) и лемме внутренняя $\mathcal{P}$ — емкость множества $\{A \in D : \lim\limits_{r \to \infty} W_\alpha(r, A) = -\infty\}$ равна нулю. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Множество дивизоров приближения $E_f \subset |L|$ голоморфного отображения $f : \mathbf{C}^n \to P^m$ имеет внутреннюю $\mathcal{P}$-емкость-нуль.*

3. Докажем обобщение основной теоремы Неванлинны для мероморфных функций $n$ переменных. Для $n = 1$ оно было дано в работе [6] (см. также [7], [8]). При этом нам представится удобным определить характеристики Неванлинны также, как в работе [9].

Пусть $f(z)$, $a(z)$ — мероморфные функции в $\mathbf{C}^n$ и $P^{n-1}$ — проективное пространство комплексных прямых $l = \{z = w\omega, w \in \mathbf{C}^n, \| w \| = 1, \omega \in \mathbf{C}\}$. Положим $f_l(\omega) = f(z)|_l$, $a_l(\omega) = a(z)|_l$ и введем следующие обозначения: $N_f(r, a, l)$ — считающая функция множества $\{\omega : f_l(\omega) = a_l(\omega)\}$; $m_f(r, a, l) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f_l(re^{i\varphi}) - a_l(re^{i\varphi})|} d\varphi$ — функция приближения $f_l$ к $a_l$;

$T_f(r, l) = N_f(r, \infty, l) + m_f(r, \infty, l)$ — характеристическая функция для $f_l$; $N_f(r, a) = \int\limits_{P^{n-1}} N_f(r, a, l)\, d\mu(l)$, $m_f(r, a) = \int\limits_{P^{n-1}} m_f(r, a, l)\, d\mu(l)$, $T_f(r) = \int\limits_{P^{n-1}} T_f(r, l)\, d\mu(l)$ — соответствующие характеристики для $f$ и $a$. Нетрудно доказать первую основную теорему Неванлинны в следующем виде:

$$N_f(r, a) + m_f(r, a) = T_f(r) + Q(r, a), \tag{7}$$

где $Q(r, a) = O(T_a(r))$.

Лемма 2. *Пусть $f \not\equiv \mathrm{const}$, $a_1, \ldots, a_p$ — различные мероморфные функции одного переменного и $L(a_1, \ldots, a_p)$ — совокупность линейных комбинаций $c_1 a_1 + \ldots c_p a_p$, $(c_1, \ldots, c_p) \in \mathbf{C}^p$. Тогда для любых $b_1, b_2, \ldots, b_q \in L(a_1, \ldots, a_p)$, $q > p$, имеет место соотношение*

$$(q-1) T_f(r) \leqslant \sum_{\nu=1}^{q} N_f(r, b_\nu) + pN_f(r) + \sum_{\nu=0}^{q} \sum_{k=1}^{p} m_{\varphi_{k,\nu}}(r, \infty) + Q(r, a_1, \ldots a_p), \tag{8}$$

*где* $\varphi_{k,\nu} = \frac{f^{(k)} - b_\nu^{(k)}}{f - b_\nu}$, $\quad \varphi_{k,0} = \frac{f^{(k)}}{f}$, $k = 1, \ldots, p$, $Q(r, a_1, \ldots, a_p) \leqslant O\left(\sum\limits_{\nu=1}^{p} T_{a_\nu}(r)\right)$.

Доказательство. Без нарушения общности предполагаем, что $a_1, \ldots$ $\ldots, a_p$ — линейно независимые и пусть

$$F = \begin{vmatrix} f & a_1 & a_2 & \ldots & a_p \\ f' & a_1' & a_2' & \ldots & a_p' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f^{(p)} & a_1^{(p)} & a_2^{(p)} & \ldots & a_p^{(p)} \end{vmatrix}, \quad h = \sum_{\nu=1}^{q} \frac{1}{f(z) - b_\nu(z)}.$$

Нетрудно доказать, что $T_h(r) = qT_f(r) + Q(r, a_1, \ldots, a_p)$, $N_h(r, \infty) = \sum_{\nu=1}^{q} N_f(r, b_\nu)$. Следовательно,

$$m_h(r, \infty) = \sum_{\nu=1}^{q} m_f(r, b_\nu) + Q(r, a_1, \ldots, a_p). \tag{9}$$

С другой стороны,

$$m_h(r, \infty) = m_{hF\frac{1}{F}}(r, \infty) \leqslant m_{\frac{1}{F}}(r, \infty) + m_{hF}(r, \infty), \tag{10}$$

где: $m_{1/F}(r, \infty) = T_{1/F}(r) - N_{1/F}(r, \infty) = T_F(r) - N_F(r, \infty) + N_F(r, \infty) - N_{1/F}(r, \infty) + O(1) = m_F(r, \infty) + N_F(r, \infty) - N_{1/F}(r, \infty) + O(1) \leqslant m_f(r, \infty) + m_{F/f}(r, \infty) + N_F(r, \infty) + O(1)$. Учитывая очевидное соотношение $N_F(r, \infty) \leqslant (p+1) N_f(r, \infty) + Q(r, a_1, \ldots, a_p)$, согласно равенствам (9), (10), получаем, что

$$\sum_{\nu=1}^{q} m_f(r, b_\nu) \leqslant T_f(r) + pN_f(r, \infty) - N_{1/F}(r, \infty) + m_{F/f}(r, \infty) + m_{hF}(r, \infty) + Q(r, a_1, \ldots, a_p). \tag{11}$$

Отметим, что

$$\frac{F}{f} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_p \\ f'/f & a_1' & \ldots & a_p' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f^{(p)}/f & a_1^{(p)} & \ldots & a_p^{(p)} \end{vmatrix}$$

и

$$hF = \sum_{\nu=1}^{q} \frac{F}{f - b_\nu} = \sum_{\nu=1}^{q} \frac{1}{f - b_\nu} \begin{vmatrix} f - b_\nu & a_1 & \ldots & a_p \\ f' - b_\nu' & a_1' & \ldots & a_p' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f^{(p)} - b_\nu^{(p)} & a_1^{(p)} & \ldots & a_p^{(p)} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{q} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_p \\ \dfrac{f' - b_\nu'}{f - b_\nu} & a_1' & \ldots & a_p' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{f^{(p)} - b_\nu^{(p)}}{f - b_\nu} & a_1^{(p)} & \ldots & a_p^{(p)} \end{vmatrix}.$$

Поэтому $m_{F/f}(r, \infty) + m_{hF}(r, \infty) \leqslant \sum_{\nu=0}^{q} \sum_{k=1}^{p} m_{\varphi_{k,\nu}}(r, \infty)$ и из неравенства (11) получаем требуемое (8).

Лемма 3. *Пусть $f$ и $a_1, a_2, \ldots, a_p$ — различные мероморфные функции в $\mathbf{C}^n$, причем $f$ — не рациональная. $L(a_1, \ldots, a_p)$ — совокупность линейных комбинаций $c_1a_1 + \ldots + c_pa_p$, $(c_1, \ldots, c_p) \in \mathbf{C}^p$. Тогда для любых $b_1$,*

$b_2, \ldots, b_q \in L(a_1, \ldots, a_p)$, $q > p$, *имеет место соотношение*:

$$(q-1)\, T_f(r) \leqslant \sum_{\nu=1}^{q} N_f(r, b_\nu) + pN_f(r, \infty) + Q(r, a_1, \ldots, a_p) + o(T_f(r)), \quad (12)$$

*при* $r \to \infty$, *пропуская быть может множество конечной длины.*

Здесь, как и в лемме 2, $Q(r, a_1, \ldots, a_p) \leqslant O\left(\sum_{\nu=1}^{p} T_{a_\nu}(r)\right)$.

Доказательство легко получается из формулы (8), выписанной для сужений $f_l$, $a_l$, $l \in P^{n-1}$, и проинтегрированной по всем комплексным прямым $\{l\} = P^{n-1}$. При этом оценка остаточного члена получается из многомерного аналога теоремы о логарифмической производной: для любой мероморфной функции $f$ имеет место оценка $m_{z\,\mathrm{grad}\, f/f}(r) \leqslant o(T_f(r))$ при $r \to \infty$, пропуская быть может множество конечной длины (см., например, [9 — 11]).

Пусть $L_f$ — совокупность мероморфных в $\mathbf{C}^n$ функций $a(z)$ таких, что $T_a(r) = o(T_f(r))$ при $r \to \infty$, исключая быть может множество конечной длины. Если $f$ — рациональная функция, то $L_f$ состоит из констант. Этот хорошо исследованный случай в дальнейшем исключаем из рассмотрения.

Из леммы 3 несложно выводится следующее обобщение второй основной теоремы Неванлинны.

Теорема 2. *Пусть $f$ и $a_1, a_2, \ldots, a_p \in L_f$ — различные мероморфные функции в $\mathbf{C}^n$. Тогда для любых $b_1, \ldots, b_q \in L(a_1, \ldots, a_p)$, $q > p$, выполняется следующее неравенство*:

$$(q-1)\, T_f(r) \leqslant \sum_{\nu=1}^{q} N_f(r, b_\nu) + pN_f(r, \infty) + o(T_f(r)), \quad (12)$$

*при* $r \to \infty$, *пропуская быть может множество конечной длины.*

Следствие 1. *Если* $f: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ *целая функция, то соотношение* (12) *принимает вид* $(q-1)\, T_f(r) \leqslant \sum_{\nu=1}^{q} N_f(r, b_\nu) + o(T_f(r))$.

Обозначим $\delta_f(b_\nu) = 1 - \overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, N_f(r, b_\nu)/T_f(r)$ дефект функции $b_\nu$. Тогда из соотношения (12) получаем:

$$\sum_{\nu=1}^{q} \delta(b_\nu) + p\delta_f(\infty) \leqslant p + 1. \quad (13)$$

Отметим, что в этом неравенстве вместо $\delta_f(\infty)$ может фигурировать дефект любой функции $a \in L_f$; если существует функция $a \in L_f$ с дефектом $\delta_f(a) = 1$, то для любых $b_1, b_2, \ldots, b_q \in L(a_1, \ldots, a_p)$ имеет место соотношение $\sum_{\nu=1}^{q} \delta_f(b_\nu) \leqslant 1$.

4. Лемма 3 позволяет получить следующий аналог результата Неванлинны (см. 11, 12]).

Теорема 3 *Пусть $f$ и $g$ две мероморфные функции в $\mathbf{C}^n$, для которых корни уравнений $f(z) = b_\nu(z)$ и $g(z) = a_\nu(z)$ совпадают для $p+4$ функций $b_1, \ldots, b_{p+4} \in L(a_1, \ldots, a_p)$, $a_1, \ldots, a_p \in L_f$. Тогда $f \equiv g$.*

Доказательство. Если $f$ не рациональная функция, то из леммы 3 получаем

$$\{3 + o(1)\}\, T_f(r) \leqslant \sum_{\nu=1}^{p+4} N_f(r, b_\nu), \quad (14)$$

при $r \to \infty$, пропуская быть может множество конечной длины $I \subset R^+$. Отсюда следует, что при $r \notin I$

$$T_f(r) = O\left(\sum_{\nu=1}^{q} N_f(r, b_\nu)\right) = O\left(\sum_{\nu=1}^{q} N_g(r, b_\nu)\right) \leqslant O(T_g(r)).$$

Поэтому $a_1, \ldots, a_p \in L_g$ и из теоремы 2 получаем

$$\{3 + o(1)\} T_g(r) \leqslant \sum_{\nu=1}^{p+4} N_g(r, b_\nu), \tag{15}$$

при $r \to \infty$, пропуская быть может множество конечной длины.

Предположим противное: $f \not\equiv g$. Тогда из (14), (15)

$$T_{(f-g)^{-1}}(r) = T_{f-g}(r) + O(1) \leqslant T_f(r) + T_g(r) + O(1) \leqslant$$

$$\leqslant \{2/3 + o(1)\} \sum_{\nu=1}^{p+4} N_f(r, b_\nu),$$

при $r \to \infty$, пропуская быть может множество конечной длины. Но это противоречит следующему неравенству:

$$\sum_{\nu=1}^{p+4} N_f(r, b_\nu) \leqslant N_{(f-g)^{-1}}(r) \leqslant T_{(f-g)^{-1}}(r) + O(1).$$

Значит, $f \equiv g$.

Следствие 2. *Если в теореме 3 функции $f$, $g$ целые, то для $f \equiv g$ достаточно совпадения четырех прообразов*:

$$(f - b_\nu)^{-1}(0) = (g - b_\nu)^{-1}(0), \ \nu = 1, \ldots, 4.$$


1. Drasin D., Weitsman A. Indian Univ. Math. I., 1971, 20, № 8, p. 699—715.
2. Еременко А. Э. О росте неванлинновской функции приближения. Сиб. мат. ин., 1978, **19**, № 3, с. 571—576.
3. Садулаев А. Дефектные дивизоры в смысле Валирона. — Мат. сб. 1979, **108** № 4, с. 567—579.
4. Захарюта В. П. Экстремальные плюрисубгармонические функции, гильбертовы шкалы и изоморфизм пространств аналитических функций многих переменных.— В кн.; Теория функций, функциональный анализ. Харьков, вып. 19, 1974, с. 133—157; вып. 21, 1974, с. 65—83.
5. Griffits P., King I. Nevanlinna theory and holomorphie mapping between algebraic varieties. — Acta. Math., 1973, 130, p. 145—220.
6. Chuang Chi-tai. Une generalisation d'une inegalite de Nevanlinna. — Sci. Sinica, 1964, **13**, p. 887 895.
7. Хейман У. Мероморфные функции. М.: Мир, 1966.
8. Прокопович Г. С. О неподвижных точках мероморфных функций. — Укр. мат. журн., 1973, **25**, № 2, с. 248—260.
9. Gauthier P. M., Hengartner W. The value distribution of most functions of one or several complex variables. Annals of Mathematics, 1972, 96:1, p. 31—52.
10. Vilter A I. The lemma of the logoriphmic derivative in several complex variables, Duhe. Math. I., **44**, N 11, (1977), p. 89—104.
11. Stoll W. Value Distribution on parabolic spaces. INC — Verl — Berlin — Heid— New-York, 1977.
12. Fujimoto, Hurotaka. A uniqueness theorem of algebraically nondegenerate meromorphic mapps into $P^N$ (**C**). Nagoya Math. I., 1976, **64**, p. 117—147.



Институт математики АН УзССР
Ташкентский государственный университет



Поступила в редакцию
6.02.1980 г.