УДК 517.9

Е. Д. Белоколос, И. М. Першко

Связь между гладкостью потенциала и размерами лакун в предельном спектре оператора Шредингера

Изучение связи между гладкостью потенциала и размерами лакун в предельном спектре оператора Шредингера начато в работе [1]. В работах [2, 3] доказано, что если вещественная функция $q(t) \in C^p(R)$ и $\|q\|_p \equiv \max\limits_{0\leqslant n\leqslant p} \sup\limits_t |q^{(n)}(t)| = O(1)$, то в предельном спектре самосопряженного оператора $L: Ly = -y'' + q(t)y$ в $\mathcal{L}_2(R)$ длина лакуны $\Delta(\lambda)$ с центром в точке λ удовлетворяет асимптотическому равенству $\Delta(\lambda) = O(\lambda^{-p/2})$. Ниже этот результат уточняется, а именно, доказывается теорема [4].

Теорема. *Пусть для самосопряженного оператора L в $\mathcal{L}_2(R)$, порожденного дифференциальным выражением $ly = -y'' + q(t)y$, вещественная функция $q(t)$ при больших $|t|$ имеет $p \geqslant 1$ производных и $\max\limits_{0\leqslant n\leqslant p} \overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}} |q^{(n)}(t)| \leqslant M$. Тогда в предельном спектре оператора L длина лакуны $\Delta(\lambda)$ с центром в точке λ при $\lambda \geqslant \lambda_0 = [\Gamma((p+3)/2)]^{4/p}(1+M)$ характеризуется неравенством $\Delta(\lambda) < CM(\lambda_0/2\lambda)^{p/2}$, где постоянная $C < 18{,}2$.*

Приведенная оценка существенно уточняется для малых p: если $p=1$, $\lambda \geqslant M$, то $\Delta(\lambda) \leqslant 4{,}4M\lambda^{-1/2} + 0{,}5M(M+3)\lambda^{-1}$; $p=2$, $\lambda \geqslant M$, — $\Delta(\lambda) \leqslant 0{,}5M(5+M)\lambda^{-1}$; $p=3$, $\lambda \geqslant 1+M$, — $\Delta(\lambda) \leqslant 1{,}3M(1+2M)\lambda^{-3/2} + 0{,}3M^2(26+M)\lambda^{-2}$; если $p=4$, $\lambda \geqslant 1+M$, то $\Delta(\lambda) \leqslant 4{,}3M(1+M)^2\lambda^{-2}$.

Доказательство теоремы основано на следующем утверждении [5]: *Для того, чтобы в предельном спектре оператора L в $\mathcal{L}_2(R)$ длина лакуны $\Delta(\lambda)$ с центром в точке λ удовлетворяла неравенству*

$$\Delta(\lambda) \leqslant 2\eta, \tag{1}$$

необходимо и достаточно существование ограниченной и некомпактной в $\mathcal{L}_2(R)$ последовательности функций $y_n(t)$ таких, что

$$\|(L-\lambda I)y_n\| \leqslant \eta \|y_n\|. \tag{2}$$

Доказательство. Функция $y(t) = C_1[\alpha'(t)]^{-1/2}\sin[\alpha(t) + C_2]$, зависящая от произвольных постоянных C_1, C_2, является общим решением уравнения $y'' + (\lambda - q(t))y = 0$, если $\alpha(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\alpha'^2 + \{\alpha, t\} - \lambda + q = 0, \tag{3}$$

где $\{\alpha, t\} = (1/2)(\alpha'''/\alpha') - (3/4)(\alpha''/\alpha')^2$ — производная Шварца. Ищем решение этого уравнения в виде формального ряда

$$\alpha' = \lambda^{1/2}\Big(1 + \sum_{l=1} a_l \lambda^{-l}\Big). \tag{4}$$

Подставляя ряд (4) в дифференциальное уравнение (3) и приравнивая нулю коэффициенты при λ^{-l}, $0 \leqslant l \leqslant k-1$, получаем рекуррентные уравнения для определения коэффициентов a_l, $1 \leqslant l \leqslant k$:

$$2a_1 + q = 0, \quad 2a_2 + a_1^2 + \frac{1}{2} a_1'' = 0,$$

$$2a_{r+1} + \sum_{p=1}^{r} a_p a_{r-p+1} + \frac{1}{2} a_r'' + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{r-1} a_{r-p}'' b_p - \frac{3}{4} \sum_{p=1}^{r-1} c_p c_{r-p} = 0, 2 \leqslant r \leqslant k-1. \tag{5}$$

Здесь коэффициенты b_l и c_l определяются соответственно равенствами

$$\left(1 + \sum_{l=1} a_l \lambda^{-l}\right)^{-1} = 1 + \sum_{l=1} b_l \lambda^{-l}, \tag{6}$$

$$\left(\sum_{l=1} a_l' \lambda^{-l}\right)\left(1 + \sum_{l=1} a_l \lambda^{-l}\right)^{-1} = \sum_{l=1} c_l \lambda^{-l}. \tag{7}$$

Из рекуррентных уравнений (5) — (7), в частности, следует

$$a_1 = -q/2, \quad a_2 = (q'' - q^2)/8, \quad a_3 = -(q^{\mathrm{IV}} - 6qq'' - 5q'^2 + 2q^3)/32,$$

$$a_4 = (q^{\mathrm{VI}} - 10qq^{\mathrm{IV}} - 28q'q''' - 19''^2 + 30q''q^2 + 50q'^2 q - 5q^4)/128. \tag{8}$$

Методом индукции можно показать, что a_k — линейная комбинация произведений $\prod_{s=0}^{2(k-1)} [q^{(s)}]^{m_s}$, $1 \leqslant \sum_{s=0}^{2(k-1)} m_s \leqslant k$. Таким образом, для вычисления a_k требуется наличие достаточно большого числа производных функции q.

Пусть при больших $|t|$ функция q имеет $p = 2k$, $k \geqslant 1$ производных. Построим

$$A'(t) = \lambda^{1/2} \left(1 + \sum_{l=1}^{k} a_l \lambda^{-l}\right), \tag{9}$$

где коэффициенты a_l определены описанным выше образом. Поскольку функция $A'(t)$ дважды дифференцируема, можно определить

$$Q(t, \lambda) = \lambda - A'^2 - \{A, t\} \tag{10}$$

и функцию

$$Y(t) = C_1 [A'(t)]^{-1/2} \sin [A(t) + C_2], \tag{11}$$

являющуюся решением уравнения $Y'' + (\lambda - Q(t, \lambda)) Y = 0$. Согласно построению

$$q - Q = \sum_{r=k}^{2k-1} \lambda^{-r} \sum_{p=r-k+1}^{k} a_p a_{r-p+1} + \frac{1}{2} a_k'' \lambda^{-k} \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^{-p} b_p\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{r=k}^{\infty} \lambda^{-r} \sum_{p=1}^{k-1} a_p'' b_{r-p} - \frac{3}{4} \sum_{r=\max(2,k)}^{\infty} \lambda^{-r} \sum_{p=1}^{r-1} c_p c_{r-p}. \tag{12}$$

Следовательно, $q - Q = O(\lambda^{-k})$. Для того, чтобы заменить это асимптотическое равенство численной оценкой, необходимо получить оценки для a_l, a_l', a_l'', b_l, c_l. Согласно изложенному выше, a_l — линейная комбинация произведений $\prod_{s=0}^{2(l-1)} [q^{(s)}]^{m_s}$, $1 \leqslant \sum_{s=0}^{2(l-1)} m_s \leqslant l$. Следовательно, если $\max\limits_{0 \leqslant n \leqslant p} \overline{\lim\limits_{|t| \to \infty}} |q^{(n)}(t)| \leqslant$ $\leqslant M$, то $\overline{\lim\limits_{|t| \to \infty}} |a_l| \leqslant f_l M (1 + M)^{l-1}$, $\overline{\lim\limits_{|t| \to \infty}} |a_l'| \leqslant l f_l M (1 + M)^{l-1}$, $\overline{\lim\limits_{|t| \to \infty}} |a_l''| \leqslant$

$\leqslant l^2 f_l\, M(1+M)^{l-1}$, где f_l — постоянная, независящая от потенциала. Коэффициенты b_l, c_l, согласно (6), (7), удовлетворяют рекуррентным уравнениям

$$b_1 = -a_1, \quad b_l = -a_l - \sum_{p=1}^{l-1} a_p b_{l-p}, \quad 2 \leqslant l \leqslant k; \quad b_l = -\sum_{p=1}^{k} a_p b_{l-p}, \quad k+1 \leqslant l; \tag{13}$$

$$c_1 = a_1', \quad c_l = a_l' - \sum_{p=1}^{l-1} a_p c_{l-p}, \quad 2 \leqslant l \leqslant k; \quad c_l = -\sum_{p=1}^{k} a_p c_{l-p}, \quad k+1 \leqslant l. \tag{14}$$

Из уравнений (5), (13), (14) следует, что

$$\begin{gathered}
\overline{\lim_{|t|\to\infty}} |a_l| \leqslant (l-1)!^2 2^{-l} M (1+M)^{l-1}, \quad 1 \leqslant l \leqslant k; \\
\overline{\lim_{|t|\to\infty}} |b_l| \leqslant (3/2)(l-1)!^2 2^{-l} M (1+M)^{l-1}, \quad 1 \leqslant l \leqslant k; \\
\overline{\lim_{|t|\to\infty}} |c_l| \leqslant (4/3)\, l!\, (l-1)! 2^{-l} M (1+M)^{l-1}, \quad 1 \leqslant l \leqslant k.
\end{gathered} \tag{15}$$

Действительно, для a_l ($l = 1, 2, 3, 4$) справедливость неравенств (15) следует из рассмотрения (8). Для b_l, c_l ($l = 1, 2, 3$) справедливость неравенств (15) следует из рассмотрения выражений, получаемых для этих коэффициентов в результате непосредственного решения рекуррентных уравнений (13), (14). Для прочих значений l выполнение неравенств (15) доказывается методом индукции.

Из уравнений (5), (13), (14) также следует, что

$$\begin{gathered}
\overline{\lim_{|t|\to\infty}} |b_l| \leqslant (3/2)\, \varkappa^{2(l-1)} 2^{-l} M (1+M)^{l-1}, \quad k+1 \leqslant l; \\
\overline{\lim_{|t|\to\infty}} |c_l| \leqslant (4/3)\, \varkappa^{2l-1} 2^{-l} M (1+M)^{l-1}, \quad k+1 \leqslant l,
\end{gathered} \tag{16}$$

где $\varkappa = k|^{1/k}$. Действительно, поскольку функция $\varkappa = k!^{1/k}$ монотонно растет с ростом k, то $l! \leqslant \varkappa^l$ $(0 \leqslant l \leqslant k)$. Подставляя это неравенство в (15), доказываем справедливость неравенств (16) для $1 \leqslant l \leqslant k$. После этого справедливость неравенств (16) для $l \geqslant k+1$ устанавливается методом индукции.

Используя неравенства (15), (16), нетрудно показать, что при условии $\lambda \geqslant \lambda_0 = \varkappa^2(1+M)$ из (12) следует оценка

$$\overline{\lim_{|t|\to\infty}} |q - Q| < 9{,}1 M (\lambda_0/2\lambda)^k. \tag{17}$$

При выполнении условия (21) $|A'| > \varkappa(1+M)^{-1/2}$, благодаря чему из (11) следует, что $|Y(t)| < C$, где C — постоянная, $Y(t) \bar{\in} \mathscr{L}_2(R)$. Пусть функция $Z(t) \in C^2(R)$, $Z(t) = 1$ при $|t| < 1/2$, $Z(t) = 0$ при $|t| > 1$. Тогда последовательность функций $y_n(t) = Y(t) Z(\varepsilon(t - t_n))$, $t_n = 2n\varepsilon^{-1}$, $\varepsilon > 0$, — ограниченная некомпактная последовательность. При помощи этой последовательности из неравенств (1), (2) нетрудно получить $\Delta(\lambda) \leqslant 2 \overline{\lim_{|t|\to\infty}} |q - Q|$. Отсюда и из (17) следует, что

$$\Delta(\lambda) < 18{,}2 M (\lambda_0/2\lambda)^k. \tag{18}$$

Пусть при больших $|t|$ функция q имеет $p = 2k - 1$, $k \geqslant 1$ производных. В этом случае доказательство теоремы, изложенное выше для $p = 2\kappa$, не проходит, поскольку при $p = 2k - 1$ построенная, согласно (9), функция $A'(t)$ лишь однократно дифференцируема и, следовательно, ей недостает еще одной производной, которая необходима для построения Q согласно (10). Для того, чтобы обойти эту трудность, мы заменим в формуле (9) однократно дифференцируемую функцию $a_k(t)$ сглаженной двукратно дифференцируемой функцией $\bar{a}_k(t)$ и определим $A'(t)$ следующим образом:

$$A'(t)=\lambda^{1/2}\left(1+\sum_{l=1}^{k-1}a_l\lambda^{-l}+\bar{a}_k\lambda^{-k}\right). \tag{19}$$

Сглаживание функций будем выполнять по формуле

$$\bar{a}(t)=N\int K[N(t-t')]\,a(t')\,dt', \tag{20}$$

где N — параметр, а

$$K(t)=\begin{cases}\sigma(1-t^2)^3, & |t|\leqslant 1,\\ 0, & |t|\geqslant 1.\end{cases}$$

Здесь постоянная $\sigma=35/32$ определяется из условия нормировки $\int K(t)dt=1$. Согласно (20), если функция $a(t)$ однократно дифференцируема, то функция $\bar{a}(t)$ двукратно дифференцируема, и обе эти функции связаны неравенствами

$$\begin{gathered}\overline{\lim_{|t|\to\infty}}|\bar{a}(t)-a(t)|\leqslant N^{-1}\overline{\lim_{|t|\to\infty}}|a'(t)|,\quad \overline{\lim_{|t|\to\infty}}|\bar{a}(t)|\leqslant\overline{\lim_{|t|\to\infty}}|a(t)|,\\ \overline{\lim_{|t|\to\infty}}|\bar{a}'(t)|\leqslant\overline{\lim_{|t|\to\infty}}|a'(t)|,\quad \overline{\lim_{|t|\to\infty}}|\bar{a}''(t)|\leqslant 2\sigma N\,\overline{\lim_{|t|\to\infty}}|a'(t)|.\end{gathered} \tag{21}$$

Постоянная согласно (19) функция $A'(t)$ двукратно дифференцируема и это дает возможность определить Q по формуле (10). В результате для $q-Q$ получаем выражение, которое можно представить в виде суммы двух слагаемых. Первое слагаемое получается из правой части формулы (12), если в ней заменить a_k на $\bar{a}_k$, а коэффициенты b_l, c_l вычислить по уравнениям (13), (14), предварительно заменив в этих уравнениях a_k на $\bar{a}_k$. Согласно (21), оценки для $|\bar{a}_k|$, $|\bar{a}_k'|$ совпадают с соответствующими оценками для $|a_k|$, $|a_k'|$. Поэтому оценки тех частей первого слагаемого, которые не содержат $\bar{a}_k''$, совпадают с оценками соответствующих частей правой части формулы (12). А оценка части первого слагаемого, содержащей $\bar{a}_k''$, имеет, согласно (21), следующий вид:

$$\overline{\lim_{|t|\to\infty}}\lambda^{-k}\left|\frac{1}{2}\bar{a}_k''\left(1+\sum_{p=1}^{\infty}\lambda^{-p}b_p\right)\right|<2{,}8\,\frac{N}{\lambda_0^{1/2}}\,M\left(\frac{\lambda_0}{2\lambda}\right)^k.$$

Таким образом, первое слагаемое в выражении для $q-Q$ при больших $|t|$ оценивается сверху величиной

$$\left(2{,}8\,\frac{N}{\lambda_0^{1/2}}+7{,}9\right)M\left(\frac{\lambda_0}{2\lambda}\right)^k. \tag{22}$$

Второе слагаемое в выражении для $q-Q$ равно

$$\lambda^{-k+1}2(\bar{a}_k-a_k) \tag{23}$$

и имеет следующее происхождение. Согласно построению, a_l, $1\leqslant l\leqslant k$, выбираются таким образом, чтобы коэффициенты при λ^{-l}, $0\leqslant l\leqslant k-1$, в выражении для $q-Q$ (эти коэффициенты равны левым частям равенств (5)) обращались в нуль. Когда при переходе от (9) к (19) мы заменяем a_k на $\bar{a}_k$, коэффициент при λ^{-k+1} в разложении $q-Q$ оказывается отличным от нуля и равным $2(\bar{a}_k-a_k)$. Второе слагаемое в выражении для $q-Q$

(23), согласно (21), при больших $|t|$ оценивается сверху величиной

$$2\frac{\lambda}{N\lambda_0^{1/2}}M\left(\frac{\lambda_0}{2\lambda}\right)^k. \tag{24}$$

Складывая (22) и (24), получаем следующую оценку для $\overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}}|q-Q|$:

$$\overline{\lim_{|t|\to\infty}}|q-Q|<\left(2\frac{\lambda}{N\lambda_0^{1/2}}+2{,}8\frac{N}{\lambda_0^{1/2}}+7{,}9\right)M\left(\frac{\lambda_0}{2\lambda}\right)^k. \tag{25}$$

Положим параметр сглаживания $N=(\lambda/1{,}4)^{1/2}$ для того, чтобы минимизировать правую часть неравенства (25). Тогда, с учетом неравенства $\lambda\geqslant\lambda_0$, находим

$$\overline{\lim_{|t|\to\infty}}|q-Q|<\left[4{,}8\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^{1/2}+7{,}9\right]M\left(\frac{\lambda_0}{2\lambda}\right)^k<9M\left(\frac{\lambda_0}{2\lambda}\right)^{k-1/2}. \tag{26}$$

Из рассуждений, аналогичных тем, которые были использованы для выхода неравенства (18), следует оценка

$$\Delta(\lambda)<18M(\lambda_0/2\lambda)^{k-1/2}. \tag{27}$$

Сравнивая (18) и (27), окончательно получаем, что при $p\geqslant1$ и $\lambda\geqslant\lambda_0=\left[\Gamma\left(\frac{p+3}{2}\right)\right]^{4/p}(1+M)$ длина лакуны $\Delta(\lambda)$ с центром в точке λ удовлетворяет неравенству

$$\Delta(\lambda)<CM(\lambda_0/2\lambda)^{p/2}, \tag{28}$$

где постоянная $C<18{,}2$.

Общая оценка (28) размеров лакун в предельном спектре оператора Шредингера может быть существенно улучшена в случае малых p, когда можно воспользоваться явными выражениями для коэффициентов a_k (8). Пусть, например, $p=2$. Согласно (9), (8), положим

$$A'(t)=\lambda^{1/2}(1-q/2\lambda). \tag{29}$$

Подставляя (29) в (10), получаем

$$q-Q=\frac{1}{4\lambda}\left[q^2-\frac{q''}{1-(q/2\lambda)}-\frac{3}{4\lambda}\frac{q'^2}{(1-(q/2\lambda))^2}\right]. \tag{30}$$

Учитывая, что $\overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}}|q|$, $\overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}}|q'|$, $\overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}}|q''|\leqslant M$ и полагая $\lambda\geqslant M$, находим из (30) $\overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}}|q-Q|\leqslant M(5+M)/4\lambda$. Следовательно, при $p=2$ и $\lambda\geqslant M$ $\Delta(\lambda)\leqslant M(5+M)/2\lambda$. Пусть $p=1$. Согласно (19), (8), положим

$$A'(t)=\lambda^{1/2}(1-\bar{q}/2\lambda). \tag{31}$$

Здесь через $\bar{q}$ обозначена сглаженная в соответствии с (20) функция q. Подставляя (31) в (10), получим

$$q-Q=q-\bar{q}+\frac{1}{4\lambda}\left[\bar{q}^2-\frac{\bar{q}''}{1-(\bar{q}/2\lambda)}-\frac{3}{4\lambda}\frac{q'^2}{(1-(\bar{q}/2\lambda))^2}\right]$$

и согласно (21)

$$\overline{\lim_{|t|\to\infty}}|\bar{q}|,\ \overline{\lim_{|t|\to\infty}}|q'|\leqslant M,\quad \overline{\lim_{|t|\to\infty}}|\bar{q}''|\leqslant 2{,}2NM,$$

полагая $\lambda\geqslant M$, находим

$$\overline{\lim_{|t|\to\infty}}|q-Q|\leqslant\frac{M}{N}+1{,}1\frac{MN}{\lambda}+\frac{M}{4\lambda}(3+M). \tag{32}$$

Полагая $N = (\lambda/1,1)^{1/2}$ для того, чтобы минимизировать правую часть неравенства (32), получаем

$$\overline{\lim_{|t|\to\infty}} |q - Q| \leqslant 2,2 \frac{M}{\lambda^{1/2}} + \frac{M}{4\lambda}(3 + M).$$

Следовательно, при $p = 1$ и $\lambda \geqslant M$

$$\Delta(\lambda) \leqslant 4,4 \frac{M}{\lambda^{1/2}} + \frac{M}{2\lambda}(3 + M).$$

Аналогичным образом, используя явные выражения для коэффициентов a_k (8), можно получить при $p = 3$; 4 оценки размеров лакун в предельном спектре, указанные в формулировке теоремы.

1. Hartman P., Putnam C. R. The gaps in the essensial spectra of wave eguations. Amer. J. Math., 1950, **72**, N 4, p. 849—862.
2. Eastham M. S. P., Asymptotic estimates for the lengths of the gaps in the essential spectrum of the self — adjoint differential operators. Pros. Roy. Soc. Edinburg, 1976, **74A**, p. 239—252.
3. Фейгин В. И. О непрерывном спектре дифференциальных операторов. Функц. анализ и его приложения, 1977, **11**, № 1, с. 43—54.
4. Белоколос Е. Д., Першко И. М. Связь между гладкостью потенциала и размерами лакун в предельном спектре оператора Шредингера.—Киев, 1977, 12 с. (Препринт Ин-та теоретической физики АН УССР).
5. Глазман И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: ГИФМЛ, 1963, 340 с.

Институт теоретической физики
АН УССР

поступила в редакцию 4. 05.1980 г
после переработки — 27.03.1981 г.