УДК 517.53

В. А. Зморович, В. А. Похилевич

Об α-почти-выпуклых функциях

В работе [1] введен класс α-почти-выпуклых функций ($\alpha \geqslant 0$). В настоящей заметке рассмотрены некоторые подклассы этого класса и предложен новый метод, позволяющий, в частности, установить точные границы для порядка обычной почти-выпуклости этих подклассов.

Введем необходимые в дальнейшем классы функций.

Через P будем обозначать класс регулярных в единичном круге $E = \{z, |z| < 1\}$ функций $p(z) = 1 + p_1 z + \ldots$, $\operatorname{Re} p(z) > 0$ в E. Через P_β $(P_{(\beta)})$ — соответственно подклассы класса P функций $q(z)$, $q(0) = 1$, определяемые соответственно равенствами

$$q(z) = \left(\frac{p(z) + h}{1 + h}\right)^{\pm 1}, \tag{1}$$

где $p(z) \in P$, $h = \beta/(1 - \beta)$, $\beta \in [0, 1)$, (знак (—) в показателе относится к классу $P_{(\beta)}$). С геометрической точки зрения классы P_β $(P_{(\beta)})$ характеризуются соответственно неравенствами:

$$\operatorname{Re} q(z) > \beta; \qquad |q(z) - 1/2\beta| < 1/2\beta, \quad z \in E. \tag{2}$$

Через S^*_β, $S^*_{(\beta)}$ обозначим соответственно классы звездных функций порядка β (рода β) $\varphi(z)$, $\varphi(0) = \varphi'(0) - 1 = 0$, (в дальнейшем всюду будем иметь в виду нормированные классы функций), определяемые равенствами:

$$z\varphi'(z)/\varphi(z) = q(z) \in P_\beta \ (P_{(\beta)}). \tag{3}$$

Единая систематизация классов P_β, $P_{(\beta)}$, S^*_β, $S^*_{(\beta)}$ и их геометрическая характеристика введена в [2].

Обозначим через $C_{\beta,\gamma}$ $(C_{(\beta),\gamma})$ — подклассы класса почти-выпуклых функций $f(z)$, определяемые соответственно равенствами: $zf'(z)/\varphi(z) = q(z) \in P_\gamma$, $\gamma \in [0, 1)$; $\varphi(z) \in S^*_\beta$ $(S^*_{(\beta)})$, $\beta \in [0, 1)$.

Очевидно, что при $\beta = \gamma = 0$ будем иметь класс почти-выпуклых функций [3], т. е. таких, для которых $\operatorname{Re}(zf'(z) | \varphi(z)) > 0$; $\varphi(z) \in S^*$, $z \in E$.

В работе [4] для классов $C_{\beta,\gamma}$ $(C_{(\beta),\gamma})$ (и некоторых других) был решен ряд экстремальных задач.

Наконец, $C_{\alpha,\beta,\gamma}$ $(C_{\alpha,(\beta),\gamma})$ — классы функций $f(z)$, определяемые следующим образом: $f(z) \in C_{\alpha,\beta,\gamma}$ $(C_{\alpha,(\beta),\gamma})$, если: 1) $f(z) f'(z)/z \neq 0$, $z \in E$; 2) $\operatorname{Re} I(f, \varphi; \alpha) > \gamma$ или, что то же,

$$I(f, \varphi; \alpha) = q(z) \in P_\gamma, \tag{5}$$

где $I(f, \varphi; \alpha) = (1 - \alpha)\dfrac{zf'(z)}{\varphi(z)} + \alpha\dfrac{(zf'(z))'}{\varphi'(z)}$; $\varphi(z) \in S^*_\beta$ $(S^*_{(\beta)})$.

Будем называть классы $C_{\alpha,\beta,\gamma}$ $(C_{\alpha,(\beta),\gamma})$ классами α-почти-выпуклых функций порядка γ и типа β. При $\beta = \gamma = 0$ получаем класс C_α-α-почти-выпуклых функций, введенных недавно [1]. Полагая $zf'(z)/\varphi(z) = w(z)$, равенство (5) приводим к виду:

$$w(z) + \alpha z w'(z)/p(z) = q(z), \tag{6}$$

где $p(z) \in P_\beta$ $(P_{(\beta)})$, $q(z)$ — та же, что и в (5).

В частности, если $p(z) \cdot q(z) = 1$, то, полагая $w_1(z) = 1/w(z)$, $q_1(z) = 1/q(z)$, приходим к дифференциальному уравнению

$$w_1(z) + \alpha z w_1'(z)/w(z) = q_1(z), \tag{7}$$

которое, следовательно, является частным случаем уравнения (6). Здесь (теорема 1) мы устанавливаем принадлежность решения $w(z)$, $w(0) = 1$

уравнения (6) классу P_γ, когда $q(z)\in P_\gamma$, $p(z)\in P_\beta$ $(P_{(\beta)})$ и тем самым доказываем, что $f(z)\in C_{\beta,\gamma}$ $(C_{(\beta),\gamma})$.

Как следствие, получаем простое доказательство принадлежности классу P решения уравнения (7).

Однако, кроме того, устанавливаем и точные оценки о порядке почтивыпуклости функций класса $C_{\alpha,\beta,\gamma}$ $(C_{\alpha,(\beta),\gamma})$ и тем самым уточняем результаты теоремы 1 (теоремы 2, 3).

При исследовании применяем метод, позволяющий решать многие другие задачи и в более общей постановке.

Для уравнения (6) имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *При* $\alpha>0$ *и при любых* $p(z)\in P_\beta$ $(P_{(\beta)})$, $q(z)\in P_\gamma$, $p(0)=q(0)=1$, *решение* $w(z)$, $w(0)=1$, *уравнения* (6) *есть регулярная функция и* $\operatorname{Re} w(z)>\gamma$, $z\in E$, *или, короче,* $w(z)\in P_\gamma$, $\gamma\in[0,1)$.

Доказательство. Предположим сначала, что решение $w(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ — регулярное в E. Полагая $q(z)=a(r,\theta)+ib(r,\theta)$; $1/p(z)=a_1(r,\theta)+ib_1(r,\theta)$; $z=re^{i\theta}$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ и отделяя в (6) вещественные части, получим:

$$u(r,\theta)+\alpha\left[ra_1(r,\theta)\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r}+b_1(r,\theta)\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial\theta}\right]=a(r,\theta). \tag{8}$$

Если (r,θ_0) — точка абсолютного минимума функции $u(r,\theta)$ на окружности $|z|=r$ и $u(r)$, $a(r)$, $a_1(r)$ — значения функций u, a, a_1 в точке (r,θ_0), а также принимая во внимание, что $\partial u(r,\theta_0/\partial\theta=0$, из равенства (8) получаем дифференциальное уравнение

$$u(r)+\alpha r a_1(r)\,u'(r)=a(r), \tag{9}$$

в котором $u'(r)\leqslant 0$, поскольку абсолютный минимум $u(r,\theta)$, если $w(z)$ — регулярная в E, монотонно убывает при возрастании r. Следовательно, $u(r)\geqslant a(r)>\gamma$. Существование $u'(r)$ следует из формулы

$$\frac{du}{dr}=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\,\frac{\partial\theta}{\partial r}.$$

Решение $w(z)$ уравнения (6) имеет вид:

$$w(z)=v_1(z)/v(z), \tag{10}$$

$$v_1(z)=\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^1\frac{P(zt)\,q(zt)\,v(zt)}{t^{1-1/\alpha}}\,dt, \tag{11}$$

$$v(z)=\exp\left(\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^1\frac{p(zt)-1}{t}\,dt\right). \tag{12}$$

Поскольку $v(z)$, $v_1(z)$ — регулярные в E и, кроме того, $v(z)\neq 0$ в E, то $w(z)$ — регулярное в E решение, причем, очевидно, что $w(0)=1$. Теорема полностью доказана.

Следствие. *Решение* $w_1(z)=1/w(z)=v(z)/v_1(z)$ *уравнения* (7), *получающегося из* (6) *при* $p(z)\cdot q(z)=1$ — *регулярно и* $\operatorname{Re} w_1(z)>0$ *в* E.

Здесь

$$v_1(z)=\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^1\frac{v(zt)}{t^{1-1/\alpha}}\,dt, \tag{13}$$

$v(z)$ — та же, что и в (10).

Если предположить, что $q(z) \in P_{(\gamma)}$, то $w_1(z) \in P_\gamma$. Таким образом мы получаем другое, более простое доказательство леммы [5].

Пусть $A_1(r)$, $A(r)$ — непрерывные на отрезке $[0,1]$ функции. Кроме того, $A(r)$ монотонно убывает, $A_1(0) = A(0) = 1$ и $A_1(r) > 0$, $A(r) > 0$ при $0 \leqslant r < 1$. Через ω обозначим совокупности пар $(a_1(r), a(r))$ измеримых на $[0, 1]$ функций, непрерывных в точке $r = 0$ и удовлетворяющих условиям $a_1(0) = a(0) = 1$, $a_1(r) \geqslant A_1(r)$, $a(r) \geqslant A(r)$ при $0 \leqslant r \leqslant 1$. На множестве ω определим $I(a_1, a) = \varliminf_{r \to 1} u(r)$, где $u(r)$ — абсолютно непрерывное решение (решение в смысле Каратеодори) задачи Коши уравнения (9), $u(0) = 1$.

Теорема 2. *Допустим, что интеграл*

$$J(r, A_1) = \int_r^1 \frac{dt}{tA_1(t)} \tag{14}$$

сходится при каждом $r \in (0, 1)$. *Тогда*

$$\min_{(a_1, a) \in \omega} I(a_1, a) = \int_0^\infty e^{-\lambda} A(r(\lambda))\, d\lambda, \tag{15}$$

где λ *и* r *связаны соотношением* $\lambda = \dfrac{1}{\alpha} J(r, A_1)$. *Если же* $J(r, A_1) = \infty$ *при каждом* $r \in (0, 1)$, *то*

$$\min_{(a_1, a) \in \omega} I(a_1, a) = A(1). \tag{16}$$

Для доказательства этой теоремы достаточно произвести в уравнении (9) замену переменной по формуле $\lambda = J(r, a_1)$. Тогда $u^*(\lambda) = u(r) =$

$= e^\lambda \int_\lambda^\infty e^{-t} a(e(t))\, dt$, где $t = J(e, a_1)$. Отсюда имеем

$$u^*(\lambda) \geqslant e^\lambda \int_\lambda^\infty e^{-t} A(e(t))\, dt \tag{17}$$

при любом $\lambda \in (0, +\infty)$. Полагая в (17) $\lambda = 0$, получаем

$$u^*(0) = \min_{(a_1, a) \in \omega} I(a_1, a) = \int_0^\infty e^{-t} A(e(t))\, dt. \tag{18}$$

Оценка (18) точная, она осуществляется тогда, когда $A(r)$ монотонно убывает с ростом r и заменой в уравнении (9) функций $a(r)$ и $a_1(r)$ соответственно функциями $A(r)$ и $A_1(r)$. Нетрудно доказывается и последнее утверждение (16) теоремы.

Из теоремы 2, как следствие, получается следующая теорема.

Теорема 3. *Если* $\varphi(z) \in S^*_\beta$, $\beta \in [0, 1)$, $\operatorname{Re} J(f, \varphi; \alpha) > \gamma$, *то* $f(z) \in C_{\beta,\gamma}$, $\gamma \in [0, 1)$.

2. *Если же* $\varphi(z) \in S^*_{(\beta)}$; $\operatorname{Re} J(f, \varphi; \alpha) > \gamma$, *то* $f(z) \in C_{(\beta),\delta}$ *где*: а) $\delta = 1 -$

$$- \frac{2(1-\gamma)}{\alpha} (2\beta)^{\nu/\alpha} \int_0^1 \frac{t^{1/\alpha} dt}{[1 - (1 - 2\beta) t]^{1+\nu/\alpha}}, \quad \nu = \frac{2(1-\beta)}{1 - 2\beta}; \; \beta \neq 0; \; \beta \neq \frac{1}{2};$$

б) $\delta = \gamma$ *при* $\beta = 0$; с) $\delta = 1 - \dfrac{2(1-\gamma)}{\alpha} e^{-1/\alpha} \displaystyle\int_0^1 t^{1/\alpha} e^{1/\alpha} dt$; $\beta = \dfrac{1}{2}$.

3. *Если же* $\varphi(z) \in S^*_{(\beta)}$, $q(z) \in P_{(\gamma)}$, *то* $f(z) \in C_{(\beta),\delta}$, *где:* а) $\delta = 1 - \frac{2(1-\gamma)}{\alpha}(2\beta)^{\nu/\alpha}\int\limits_0^1 \frac{(1+t)\,t^{1/\alpha}dt}{[1+(1-2\gamma)\,t]\,[1-(1-2\beta)\,t]^{1+\nu/\alpha}}$, $\nu = \frac{2(1-\beta)}{1-2\beta}$; $\beta \neq 0$; $\beta \neq \frac{1}{2}$; б) $\delta = 0$ *если* $\beta = 0$; с) $\delta = 1 - \frac{2(1-\gamma)}{\alpha}\,2^{1/\alpha}\int\limits_0^1\left(\frac{t}{1+t}\right)^{1/\alpha} dt$ *при* $\beta = 1/2$.

1. Pran Nath Chichra, New subclasses of the class of close to convex functions.— Proc Amer, Math, Soc., 1977, **62**, № 1, p. 37—43.
2. Зморович В. А. О границах звездности и однолитности некоторых классов функций, регулярных в круге.— Укр. мат. журн., 1966, **18**, № 3, с. 28—39.
3. Kaplan W. Close—to—convex schlicht functions.— Mich. Math G., 1952, v. **1**, p. 143—158.
4. Похилевич В. А. Экстремальные свойства некоторых классов однолистных функций.— Укр. мат. журн., 1967, **19**, № 2, с. 49—59.
5. Зморович В. А., Якубенко А. А. Об одном обобщении класса — выпуклых функций Мокану.— В кн.: Мат. сборник.: Наук. думка, 1976, с. 254—257.

Киевский
политехнический институт

Поступила в редакцию
18.11.1977 г