УДК 512.86:513.88:519,4

В. Н. Калюжный

Собственные значения суммы нормальных операторов в ультраметрическом евклидовом пространстве

В работах [1, 2] рассмотрена задача об описании множества Λ комплексных чисел, которые могут служить собственными значениями суммы двух нормальных матриц с заданными спектрами. Для Λ получено представление в виде пересечения бесконечного семейства областей определенного типа. Более точное описание этого множества, по видимому, невозможно. В предлагаемой заметке рассматривается аналогичная задача в неархимедовой ситуации. В отличие от классического случая, здесь удается получить законченный ответ.

Пусть K — поле с нетривиальным ультраметрическим абсолютным значением. Пусть E — ультраметрическое евклидово пространство над K, т. е. n-мерное неархимедово нормированное линейное пространство над K с ортонормированным базисом [3, 6]. Нормой матрицы над K называется максимум модулей ее элементов. Матрица T называется унитарной, если $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$. Матрица перехода между ортонормированными базисами является унитарной. Группу всех унитарных матриц размера $n \times n$ обозначим U_n. Справедлива следующая лемма.

Лемма. *Если $T \in U_n$, $\|T - S\| < 1$, то $S \in U_n$. Пусть $(a_{ij})*(b_{ij}) = (a_{ij}b_{ij})$ — произведение матриц в смысле Адамара. Введем следующий класс матриц $\mathfrak{M}$. По определению, $A \in \mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда найдется такая унитарная матрица T, что $\det(A*T) = 0$.*

Предложение 1. *Для того, чтобы $A \in \mathfrak{M}$ необходимо и достаточно, чтобы существовали такие номера $i_1 < i_2$, $j_1 < j_2$, что*

$$|a_{i_1j_1}a_{i_2j_2} - a_{i_1j_2}a_{i_2j_1}| = \max\{|a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}|, |a_{i_1j_2}a_{i_2j_1}|\}. \quad (1)$$

Доказательство. Заметим, что условие и заключение предложения сохраняются при перестановках и умножении строк (столбцов) матрицы A на ненулевые скаляры.

Предположим вначале, что условие предложения выполнено. Если некоторое $a_{pq}=0$, то возьмем $T=(\delta_{i\sigma(j)})$, где σ — такая подстановка, что $\sigma(p)=q$. Тогда $\det(A*T)=0$. В противном случае можно считать, что $i_1=j_1=1$, $i_2=j_2=2$, $a_{11}=a_{12}=a_{21}=1$, $a_{22}=a$. Тогда $|a-1|=\max\{|a|, 1\}$. Рассмотрим матрицу $T=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a(a-1)^{-1} & (a-1)^{-1}\end{pmatrix}\oplus I_{n-2}\in U_n$, где знак $\oplus$ обозначает ортогональную сумму матриц, I_m — единичную матрицу размера $m\times m$. Очевидно, что $\det(A*T)=0$, т. е. $A\in\mathfrak{M}$.

Предположим теперь, что условие предложения не выполняется, т. е. для всех $i_1<i_2$, $j_1<j_2$ левая часть соотношения (1) меньше правой. Тогда все $a_{ij}\neq 0$, так как для подматрицы A размера 2×2, содержащей нулевой элемент, верно (1). Поэтому можно считать, что $a_{i1}=a_{1j}=1$ $(1\leqslant i, j\leqslant n)$. При $i_1=j_1=1$, $i_2=i$, $j_2=j$ получаем $|a_{ij}-1|<\max\{|a_{ij}|, 1\}$. В силу ультраметрического неравенства отсюда следует, что $|a_{ij}-1|<1=|a_{ij}|$. Обозначим через L матрицу со всеми элементами равными 1. Тогда $\|A-L\|<1$. Для любой унитарной матрицы T имеем $\|A*T-T\|=\|(A-L)*T\|\leqslant\|A-L\|<1$. По лемме $A*T\in U_n$. Следовательно, $A\notin\mathfrak{M}$.

Следствие. *Матрица $A\in\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда некоторая ее подматрица размера 2×2 входит в $\mathfrak{M}$.*

Линейный оператор в ультраметрическом евклидовом пространстве называется нормальным, если его матрица в некотором ортонормированном базисе диагональна. Отдельные свойства нормальных операторов изучались в работах [4, 5, 6]. Множество всех нормальных операторов в E обозначим $\mathcal{N}(E)$. Пусть $\sigma(S)$ — спектр оператора S. Зафиксируем семейства $a=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$, $b=\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$ элементов поля K. Нас интересует множество $\Lambda(a; b)\equiv\Lambda(\alpha_1,\ldots,\alpha_n; \beta_1,\ldots,\beta_n)=\{\lambda\in\sigma(C): C=A+B; \sigma(A)=a, \sigma(B)=b; A, B\in\mathcal{N}(E)\}$.

Предложение 2. *Для любых наборов a, b выполняется:* $\lambda\in\Lambda(a; b)\Leftrightarrow(\alpha_j+\beta_j-\lambda)_{i,j=1,\ldots,n}\in\mathfrak{M}$.

Доказательство. $\lambda\in\Lambda(a; b)$ тогда и только тогда, когда для некоторой унитарной матрицы $T=(t_{ij})$ верно $\det(\operatorname{diag}(\alpha_i)-T\operatorname{diag}(\beta_i)T^{-1}-\lambda I)=0$, или, что то же самое, $\det(((\alpha_i+\beta_j-\lambda)t_{ij})_{i,j=1,\ldots,n})=0$. Но это означает, что $(\alpha_i+\beta_j-\lambda)_{i,j=1,\ldots,n}\in\mathfrak{M}$.

Следствие. *Справедливо равенство* $\Lambda(a; b)=\bigcup\limits_{\substack{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n\\ 1\leqslant j_1<j_2\leqslant n}}\Lambda(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}; \beta_{j_1}, \beta_{j_2})$. Оно вытекает из предложения 2 и следствия из предложения 1. В [5] был определен и явно описан «овал Кассини»: $Q(x, y, r)=\{z\in K: |x-z||y-z|\leqslant r\}$.

Предложение 3. *Положим $r=|\alpha_1-\alpha_2||\beta_1-\beta_2|$. Тогда $\Lambda(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2)=Q(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, r)=Q(\alpha_1+\beta_2, \alpha_2+\beta_1, r)$.*

Доказательство. Отметим вначале равенство

$$(\alpha_1+\beta_1-\lambda)(\alpha_2+\beta_2-\lambda)-(\alpha_1+\beta_2-\lambda)(\alpha_2+\beta_1-\lambda)=(\alpha_2-\alpha_1)(\beta_1-\beta_2). \tag{2}$$

Поэтому $\lambda\in\Lambda(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2)$ тогда и только тогда, когда

$$\max\{|\alpha_1+\beta_1-\lambda||\alpha_2+\beta_2-\lambda|, |\alpha_1+\beta_2-\lambda||\alpha_2+\beta_1-\lambda|\}=r. \tag{3}$$

Если это условие выполнено, то λ принадлежит обеим овалам. Наоборот, пусть, например,

$$|\alpha_1+\beta_1-\lambda||\alpha_2+\beta_2-\lambda|\leqslant r. \tag{4}$$

Тогда с помощью (2) получается, что

$$|\alpha_1+\beta_2-\lambda||\alpha_2+\beta_1-\lambda|\leqslant|\alpha_1-\alpha_2||\beta_1-\beta_2|. \tag{5}$$

Если бы оба неравенства (4), (5) были строгими, то из равенства (2) следовало бы, что $r<r$ — противоречие.

Значит, выполняется (3), т. е. $\lambda \in \Lambda\ (\alpha_1,\ \alpha_2;\ \beta_1,\ \beta_2)$. Из двух последних утверждений следует теорема.

Теорема. *Имеет место равенство*

$$\Lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \ldots, \beta_n) =$$
$$= \bigcup_{\substack{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n \\ 1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant n}} Q(\alpha_{i_1} + \beta_{j_1},\ \alpha_{i_2} + \beta_{j_2},\ |\alpha_{i_1} - \alpha_{i_2}|\,|\beta_{i_1} - \beta_{i_2}|),$$

В заключение заметим, что подобным образом может быть решена задача о собственных значениях произведения нормальных операторов.

1. Wielandt H. W. On the eigenvalues of sums of normal matrices. Pacific I. Math., 1955, v. 5, p. 633—638.
2. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972. 232 с.
3. A. van Rooij. Non — archimedean functional analysis. —New York, Marcel Dekker., Inc., 1978.
4. Калюжный В. Н. К спектральной теории операторов в конечномерных неархимедово нормированных пространствах.— В кн.: Математический анализ и теория вероятностей. Киев: Наук. думка, 1978, с. 82—85.
5. Калюжный В. Н. Числовая область и области локализации матриц над полем с ультраметрическим абсолютным значением. —Докл. АН УзССР, 1978, № 3, с. 8—9.
6. Калюжный В. Н. Сингулярные числа операторов в ультраметрических евклидовых пространствах. —Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 34. Харьков: Вища школа, 1980, с. 64—68.

Харьковский университет

Поступила в редакцию
10.03.1980 г.