УДК 511.9

Б. Д. Котляр

Об одном способе подсчета числа целых точек

1. Рассматривается задача подсчета числа целых точек (т. е. точек с целочисленными координатами), лежащих в криволинейной трапеции. Как правило, нетрудно получить главный член для искомой функции при заданном изменении некоторого параметра, и задача сводится к как можно более точной оценке разности между этой функцией и главным членом. Ниже показано, как для одного вида функций, графики которых ограничивают криволинейные трапеции сверху, эта задача может быть легко решена.

Пусть задана функция $f:[a, b]\to \mathbf{R}$; $a, b\in \mathbf{R}$, f — неотрицательна, возрастает и имеет обратную функцию f^{-1} такую, что $f^{-1}(\mathbf{N})\subset \mathbf{Z}$ (т. е. функция f^{-1} в целых точках принимает целые значения). Так как множество целых точек в прямоугольнике $\{(x, y)\,|\,a<x\leqslant b;\ 0<y\leqslant f(x)\}$ распадается на два множества (лежащих соответственно над и под графиком функции f), то

$$\sum_{k\in(a,b]\cap\mathbf{Z}}[f(k)]=(b-a)[f(b)]-\sum_{k\in(f(a),f(b)]\cap\mathbf{N}}(f^{-1}(k)-a)+[f(b)]-[f(a)]. \qquad (1)$$

(Здесь и далее $[\alpha]$ и $\{\alpha\}$ означают соответственно целую и дробную части числа $\alpha\in\mathbf{R}$.) Сумма, стоящая в правой части равенства (1), вычисляется иногда точно, а чаще заменяется интегралом с использованием формулы Эйлера—Маклорена либо формулы Сонина [1, гл. 8].

Проиллюстрируем описанный способ подсчета числа целых точек двумя примерами.

2. Ясно, что для $r\in\mathbf{N}$, $r>1$, дробные доли функции $\log_r x$ всюду плотно лежат на $[0, 1]$, когда x пробегает последовательность натуральных чисел. Однако справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Значения функции* $\log_r x$, $r\in\mathbf{N}$, $r>1$, *неравномерно распределены по* mod 1.

Определение равномерного распределения по mod 1 см., например, в [1 гл. 7], [2, гл. IV].

Доказательство. Полагая в (1) $f(t)\equiv\log_r t$, $a=1$, $b=n\in\mathbf{N}$, получаем

$$\sum_{k=1}^{n}[\log_r k]=(n+1)[\log_r n]-\sum_{p=1}^{[\log_r n]}r^p=(n+1)[\log_r n]-$$
$$-(r-1)^{-1}(r^{[\log_r n]+1}-r).$$

Используя формулу Стирлинга, получаем для дробных долей

$$\sum_{k=1}^{n}\{\log_r k\}=\sum_{k=1}^{n}\log_r k-\sum_{k=1}^{n}[\log_r k]=\log_r n!-(n+1)\log_r n+$$
$$+(r-1)^{-1}(r^{[\log_r n]+1}-r)=n\log_r n-(\ln r)^{-1}n-(n+1)[\log_r n]+$$
$$+(r-1)^{-1}(r^{[\log_r n]+1}-r)+O(\log_r n).$$

Полагая теперь $n=r^s$, $s\in\mathbf{N}$, получаем

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{\log_r k\}=s-(\ln r)^{-1}-s+(r-1)^{-1}r+o(1)=$$
$$=\frac{r}{r-1}-\frac{1}{\ln r}+o(1).$$

Так как при $r\in\mathbf{N}$, $r>1$, $\frac{r}{r-1}-\frac{1}{\ln r}\neq\frac{1}{2}$, то требуемый результат следует из классического критерия Вейля ([3], см. также [4]), согласно которому для равномерного распределения функции f по mod 1 необходимо и достаточно, чтобы для всех интегрируемых по Риману функций выполнялось равенство $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi(\{f(k)\})=\int\limits_0^1\varphi(t)\,dt$ (в нашем случае необходимое условие не выполняется для $\varphi(t)\equiv t$).

Несколько более сложно рассматривается вопрос о распределении по mod 1 функций $\log_{r_1}\log_{r_2}\dots\log_{r_m}x$, где $r_j\in\mathbf{N}$, $r_j\geqslant 2$, для $j=1,2,\dots,m$. И в этом случае дробные доли каждой из приведенных функций неравномерно распределены на $[0, 1]$. Для простоты приведем рассуждения для функции $\log_2\log_2 x$.

Отметим сначала, что ряд

$$-\frac{1}{\ln 2}\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)!\left(\frac{x}{(\ln x)^k}-\frac{2}{(\ln 2)^k}\right)\tag{2}$$

является асимптотическим разложением функции $\int\limits_2^x\log_2\log_2 t\,dt-x\log_2\log_2 x$ по асимптотической последовательности $(\ln x)^{-k}$, $k\in\mathbf{N}$, при $x\to+\infty$. Применяя метод интегрирования, воспользуемся способом, описанным в [5, гл. 3.] n раз, получаем

$$\int\limits_2^x\log_2\log_2 t\,dt=x\log_2\log_2 x-\frac{1}{\ln 2}\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)!\times$$
$$\times\left(\frac{x}{(\ln x)^k}-\frac{2}{(\ln 2)^k}\right)-\frac{(n-1)!}{(\ln 2)^{n+1}}\int\limits_2^x\frac{dt}{(\log_2 t)^n};$$

остается заметить, что при $x\to+\infty$

$$\int\limits_2^x\frac{dt}{(\log_2 t)^n}=o\left(\frac{x}{(\ln x)^{n-1}}\right).$$

Для доказательства в неравенстве

$$\int\limits_2^x \frac{dt}{(\log_2 t)^n} = \int\limits_2^{x_0} \frac{dt}{(\log_2 t)^n} + \int\limits_{x_0}^x \frac{dt}{(\log_2 t)^n} \leqslant x_0 - 2 + \frac{x - x_0}{(\log_2 x_0)^n}$$

полагаем $x_0 = (\log_2 x)^{-1} x$; тогда для достаточно больших x (удовлетворяющих условию $(\log_2 x)^{2n} < x$) получаем, что

$$\int\limits_2^x \frac{dt}{(\log_2 t)^n} = O\left(\frac{x}{(\log_2 x)^n}\right).$$

Далее имеем:

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{x} 2^{2^k} - 2^{2^s} = \sum_{k=1}^{s-1} 2^{2^k} < \sum_{k=1}^{2^{s-1}} 2^k = O(2^{2^{s-1}}) = o(2^s),$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{s} 2^{2^k} = 2^s(1 + o(1)) \tag{3}$$

при $s \to +\infty$.

Отметим еще, что

$$\sum_{k=2}^{n} \log_2 \log_2 k = \int\limits_2^n \log_2 \log_2 t dt + O(\log_2 \log_2 n). \tag{4}$$

Полагая в равенстве (1) $f(t) \equiv \log_2 \log_2 t$, $a = 2$, $b = n = 2^{2^s}$ для $s \in \mathbf{N}$, получаем:

$$\sum_{k=2}^{n} [\log_2 \log_2 k] = (n+1)s - \sum_{k=1}^{s} 2^{2^k}.$$

Используя соотношения (3), (4) и первый член разложения (2), имеем

$$\frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^{n} \{\log_2 \log_2 k\} = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{k=2}^{n} \log_2 \log_2 k - (n+1)s + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{s} 2^{2^k}\right) = \frac{1}{n-1}\left(n \log_2 \log_2 n + O\left(\frac{n}{\ln n}\right) + O(\log_2 \log_2 n) - \right.$$

$$\left. - (n+1)\log_2 \log_2 n + n(1 + o(1))\right) = 1 + o(1) \neq \frac{1}{2} + o(1).$$

Отсюда, как и при доказательстве теоремы 1, заключаем, что $\{\log_2 \log_2 n\}$ распределены неравномерно на $[0, 1]$.

3. Проведем подсчет числа целых точек в криволинейном треугольнике, ограниченном линиями $y = 0$, $x = n$, $y = \sqrt[r]{x}$, $r, n \in \mathbf{N}$ (при этом точки, лежащие на оси абсцисс, считать не будем). Пусть B_k означает, как обычно, k-е число Бернулли.

Теорема 2. *Пусть* $\nu = [\sqrt[r]{n}]$; *тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} [\sqrt[r]{k}] = (n+1)\nu - \frac{1}{r+1}\nu^{r+1} - \frac{1}{2}\nu^r -$$

$$- \sum_{1 \leqslant k < \frac{r+1}{2}} \frac{1}{2k}\binom{r}{2k-1} B_{2k} \nu^{r-2k+1}. \tag{5}$$

Доказательство. Полагая в (1) $f(t) \equiv \sqrt[r]{t}$, $a=0$, $b=n$, имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} [\sqrt[r]{k}] = (n+1)[\sqrt[r]{n}] - \sum_{k=1}^{[\sqrt[r]{n}]} k^r = (n+1)\nu -$$

$$- \frac{1}{r+1}\nu^{r+1} - \frac{1}{2}\nu^r - \sum_{1 \leqslant k < \frac{r+1}{2}} \frac{1}{2k}\binom{r}{2k-1} B_{2k}\nu^{r-2k+1}.$$

Тем самым сумма n слагаемых сведена к сумме, число слагаемых в которой не зависит от n (и имеет порядок r). Отметим, что при $r=2$ тождество (5) получено в [6].

1. Гельфонд А. О., Линник Ю. В. Элементарные методы в аналитической теории чисел. М. : Физматгиз, 1962. 272 с.
2. Касселс Дж. В. С. Ведение в теорию диафантовых приближений. М. : Изд-во иностр. лит., 1961. 213 с.
3. Weil H. Über die Gleichverteilung der Zahlen mod Eins.— Math. Ann., 1916, 77, s. 313—352.
4. Хуа Ло-ген. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. М. : Мир, 1964. 188 с.
5. Копсон Э. Асимптотические разложения. М. : Мир, 1966. 160 с.
6. Чезаро Э. Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых. ч. 1. М.— Л.: ОНТИ, 1936. 592 с.

ВНИИ механизации труда
в черной металлургии

Поступила в редакцию
18.12.1979 г.