УДК 519.45

В. М. Лебеденко

О системах образующих примарных абелевых групп

Введение

1. Существуют тесные связи между строением абелевых групп и внутренними свойствами их систем образующих. Об этом свидетельствуют многие работы. Одно из направлений исследования таких связей развито В. Длабом [1—3]. Используя понятие неприводимой системы образующих и введенные им понятия сильно приводимой, наследственно приводимой и наследственно сильно приводимой системы образующих (см. п. 2), Длаб разделил все системы образующих абелевых групп на следующие шесть типов: (I) — неприводимая система образующих; (II) — приводимая, но не сильно приводимая и не наследственно приводимая система образующих; (III) — сильно приводимая, но не наследственно приводимая система образующих; (IV) — наследственно приводимая система образующих, но не сильно приводимая; (V) — наследственно и сильно приводимая система образующих, но не наследственно сильно приводимая; (VI) — наследственно сильно приводимая система образующих.

Длаб показал, что существуют абелевы группы, обладающие всеми шестью типами систем образующих. Им установлено, какими вообще комбинациями типов (1) могут обладать абелевы группы (см. [2]). Это следующие комбинации:

$$\text{(I); (I), (II); (I), (II), (III); (I), (II), (III), (IV), (V);} \tag{1}$$
$$\text{(I), (II), (III), (IV), (V), (VI); (IV), (V); (IV), (V),(VI); (VI).}$$

В соответствии с этим абелевы группы можно разделить на восемь непересекающихся классов, если поставить в соответствие каждой такой комбинации типов систем образующих все абелевы группы, в которых реализуется только она:

$$D(100000) — \text{(I);}$$
$$D(110000) — \text{(I), (II);}$$
$$D(111000) — \text{(I), (II), (III);}$$
$$D(111110) — \text{(I), (II), (III), (IV), (V);} \tag{2}$$

$$D(111111) — (\mathrm{I}), (\mathrm{II}), (\mathrm{III}), (\mathrm{IV}), (\mathrm{V}), (\mathrm{VI});$$
$$D(000110) — (\mathrm{IV}), (\mathrm{V});$$
$$D(000111) — (\mathrm{IV}), (\mathrm{V}), (\mathrm{VI});$$
$$D(000001) — (\mathrm{VI}).$$

Описание классов D (100000), D (110000), D (000001) дано в работах [3, 4].

Оказалось, что класс D (100000) состоит из одной нулевой группы, а D (110000) содержит только циклическую группу второго порядка — C (2). Класс D (000001) состоит из всех ненулевых полных абелевых групп.

В работе [3] изучены примарные группы класса D (111000). В работе [4] нами получен следующий результат: если абелева группа $\mathbf{G} \in D$ (111000), то она имеет вид:

$$\mathbf{G} = T + F_n, \tag{3}$$

где T — периодическая группа с ограниченными в совокупности порядками элементов, а F_n — свободная абелева группа ранга n $(0 \leqslant n < \infty)$.

В работе [2] построены отдельные примеры примарных групп, принадлежащих классам D (111110), D (111111), D (000110), D (000111).

В работе [5] нами описаны все счетные периодические группы классов D (000110), D (000111). Найдены также некоторые виды счетных непериодических групп класса D (000110).

Проблема В. Длаба (см. [2]), заключающаяся в нахождении критериев принадлежности абелевых групп к классам (3), пока еще не решена полностью. В настоящей работе ее удалось разрешить для примарных групп.

2. Далее под группами будем подразумевать абелевы группы. Через $\bar{g}$ и $\bar{D}$ обозначим образы элемента g и подмножества D группы $\mathbf{G}$ в фактор группе $\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{G} / A$. Множество, состоящее из элементов g_λ, $\lambda \in \Lambda$, обозначим через $[g_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$, а разность некоторого множества D и одноэлементного множества g — через $D \setminus g$. Линейную комбинацию элементов множества A иногда будем обозначать через $f(A)$. Для прямой суммы групп употребляем знаки «$+$» и «Σ».

Пусть D — система образующих некоторой группы $\mathbf{G}$ $(\mathbf{G} = \{D\})$.

Определение 1. D — неприводимая, если соотношение

$$g \in \{D \setminus g\} \tag{4}$$

не выполняется ни для одного элемента $g \in D$. В противном случае D — приводима.

Определение 2. D — сильно приводима, если соотношение (4) выполняется для любого элемента $g \in D$.

Определение 3. D — наследственно приводима, если приводима всякая ее подсистема, порождающая $\mathrm{G} = \{D\}$.

Определение 4. D — наследственно сильно приводима, если сильно приводима всякая подсистема $D' \subseteq D$, которая порождает $\mathbf{G} = \{D\}$.

Решение проблемы В. Длаба для примарных групп.

1. В работе [6] показано, что в примарной группе каждый элемент нулевой высоты может быть включен в некоторую ее неприводимую систему образующих. Противоположными свойствами обладают элементы ненулевой высоты. Это показывает следующая лемма.

Лемма 1. *Если p-группа $\mathbf{G} = \{D\}$, $a \in D$ и высота $h(a) > 0$, то $a \in \{D \setminus a\}$.*

Доказательство. Так как $a = px$, $x \in \{a, D \setminus a\}$, то $a = pf(D \setminus a) + pka$. Следовательно, $(pk - 1)a = -pf(D \setminus a) \in \{D \setminus a\}$ и $a \in \{D \setminus a\}$, так как $(pk - 1, p) = 1$. Лемма доказана.

Полезным для дальнейшего рассмотрения является следующее утверждение.

Лемма 2. *Если в p-группе* $\mathbf{G}$ *система образующих D содержит элемент a и такой элемент $b \in D \setminus a$, что высота $h(a-b) > 0$, то $a \in \{D \setminus a\}$.*

Доказательство. Действительно, так как $a - b = pf(D \setminus [a, b]) + kpa + lpb$, то $(kp-1)a = -(1+lp)b + pf(D \setminus [a, b]) = f_1(D \setminus a) \in \{D \setminus a\}$. Следовательно, $a \in \{D \setminus a\}$. Лемма доказана.

Замечание. Утверждение леммы остается справедливым, если $a - b$ заменить выражением $a + \sum_{i=1}^{n} k_i b_i$, где все $b_i \in D \setminus a$.

Теорема 1. *Если в системе образующих D некоторой p-группы G для любого элемента a найдется такой элемент b, $b \in D \setminus a$. что высота $h(a-b) > 0$, то D — сильно приводима.*

Доказательство. Так как для любого элемента $a \in D$, $h(a-b) > 0$, то по лемме 2, $a \in \{D \setminus a\}$, т. е. D сильно приводима. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если p-группа* $\mathbf{G}$ *содержит такую базисную подгруппу B, что* $\mathbf{C}/B = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{C}_\lambda$, *где* $\mathbf{C}_\lambda \cong C(p^\infty)$, $\lambda \in \Lambda$ *и* $|\Lambda| = |\mathbf{G}|$, *то* $\mathbf{G}$ *обладает системой образующих типа* (VI) (см. (1)).

Доказательство. Пусть $\mathbf{G}_\lambda = \{\bar{C}_\lambda\}$ при каждом $\lambda \in \Lambda$, где $C_\lambda = [\bar{c}_{\lambda i}]_{i=1}^{\infty}$, $p\bar{c}_{\lambda 1} = 0$, $\bar{c}_{\lambda k} - p\bar{c}_{\lambda k+1} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $C_\lambda = [c_{\lambda i}]_{i=1}^{\infty}$ $(c_{\lambda i} \in \bar{c}_{\lambda i})$. Положим $c_{\lambda i}^{*} = pc_{\lambda i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Далее, пусть $B = [b_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$ (среди элементов b_λ могут быть одинаковые, если $|\Lambda| > |B|$) и $e_{\lambda i} = c_{\lambda i}^{*} + b_\lambda$, $E_\lambda = [e_{\lambda i}]_{i=1}^{\infty}$, $E = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$. Тогда множество $D = B \cup E$ — система образующих типа (VI) для группы $\mathbf{G}$. То, что D — система образующих $\mathbf{G}$, не вызывает сомнений, так как образ E в $\mathbf{G}/B$ порождает $\mathbf{G}/B$ $(p(\mathbf{G}/B) = \mathbf{G}/B)$. Пусть $D' \subseteq D$ и $\{D'\} = \mathbf{G}$. Тогда $D' = B' \cup E'$, где $\varnothing \subseteq B' \subseteq B$, $E' \subseteq E$, $E' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} E'_\lambda$ $(E'_\lambda \subseteq E_\lambda)$, $|E'_\lambda| = \aleph_0$. Покажем, что D' сильно приводима. Возьмем два произвольных элемента $e_{\lambda i}$ и $e_{\lambda j}$ из E'_λ $(i \neq j)$. Так как $e_{\lambda i} - e_{\lambda j} = c_{\lambda i}^{*} - c_{\lambda j}^{*} = p(c_{\lambda i} - c_{\lambda j})$, то $h(e_{\lambda i} - e_{\lambda j}) > 0$. Подобные построения можно сделать для любого элемента $e_{\lambda i} \in D'$. Пусть $\varnothing \neq B' \ni b_\lambda$. Рассмотрим элемент $e_{\lambda k} \in E'$, $e_{\lambda k} = c_{\lambda k}^{*} + b_k : e_{\lambda k} - b_\lambda = pc_{\lambda k}$, т. е. $h(b_\lambda - e_{\lambda k}) > 0$. Теперь видно, что для любого элемента $x \in D'$ есть такой элемент $y \in D' \setminus x$, что $h(x-y) > 0$. В силу теоремы 1 D' сильно приводима. Показано, что произвольная подсистема $D' \subseteq D$, $\{D'\} = \{D\} = \mathbf{G}$ — сильно приводима. Следовательно, D — наследственно сильно приводима (тип (VI)). Теорема доказана. Из предыдущих результатов следует теорема.

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{G}$ — *примарная группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:* А) $\mathbf{G}$ *имеет систему образующих типа* (VI); Б) $\mathbf{G}$ *или полная группа, или имеет такую базисную подгруппу B, что* $r(\mathbf{G}/B) \geqslant r(B)$ $(r(\mathbf{G}/B) = |\mathbf{G}|$, *если* $r(\mathbf{G}) \geqslant \aleph_0)$; В) $\mathbf{G}$ *не представима в виде прямой суммы*

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 \tag{5}$$

где $\mathbf{G}_1$ — *ограничена**) *и* $r(\mathbf{G}_1) > r(\mathbf{G}_2)$.

Доказательство. Для примарных групп конечного ранга теорема справедлива [5].

Б $\Rightarrow$ А. Если группа $\mathbf{G}$ имеет бесконечный ранг и $r(\mathbf{G}/B) \geqslant r(B)$, то $r(\mathbf{G}/B) = |\mathbf{G}|$. Следовательно, к $\mathbf{G}$ применима теорема 2 и она обладает системой образующих типа (VI).

*) Здесь и в дальнейшем под ограниченной примарной группой будем понимать группу с порядками элементов, ограниченными в совокупности.

В $\Rightarrow$ Б. Если группа $\mathbf{G}$ имеет бесконечный ранг и не представима в виде (5), то можно подобрать такую базисную подгруппу B, что $r(\mathbf{G}/B) \geqslant r(B)$. Для доказательства достаточно заметить, что всякая счетная неограниченная прямая сумма примарных циклических групп $\mathbf{G}'$ обладает такой базисной подгруппой B', что $r(\mathbf{G}'/B') = 1$.

А $\Rightarrow$ В. Пусть группа $\mathbf{G}$ обладает системой образующих типа (VI)

Тогда она не представима в виде (5). При $|G| > X_0$ это вытекает из теоремы 7 работы [5]. Для групп счетного ранга это утверждение следует из рассуждений, аналогичных приведенным в работе [5] при доказательстве теоремы 15. Итак, установлено, что Б $\Rightarrow$ А $\Rightarrow$ В $\Rightarrow$ Б. Теорема доказана.

2. Полученные результаты дают возможность произвести полную классификацию в смысле Длаба примарных абелевых групп. Поскольку для примарных групп классы D (100000), D (110000), D (111000), D (000001) описаны, остается рассмотреть классы D (111110), D (111111), D (000110), D (000111).

А. Класс $D(111110)$. Примарная группа $\mathbf{G}$ принадлежат $D(111110)$, тогда и только тогда, когда она имеет вид $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2$, где $\mathbf{G}_1$ — ограничена, $\mathbf{G}_2$ — неограничена и $r(\mathbf{G}_1) > r(\mathbf{G}_2)$, $r(\mathbf{G}_1) \geqslant X_0$. Если группа $\mathbf{G}$ имеет указанный вид, то она обладает неприводимой системой образующих, так как имеет прямое слагаемое мощности $|\mathbf{G}|$, разложимое в прямую сумму циклических групп [6] и не имеет систем образующих типа (VI) (см. теорему 3). В то же время $\mathbf{G}$ обладает системами образующих типов (IV), (V), поскольку не является ограниченной и системами образующих типов (II), (III) [2].

Легко показать, что группы конечного ранга не принадлежат D (111110) (см. [5, 6]). В то же время, если группа $\mathbf{G}$ бесконечного ранга принадлежит D (111110), то она (по теореме 3) имеет вид (5) и не является ограниченной ввиду результатов работы [3].

Б. Клгсс $D(111111)$. Группы этого класса характеризуются равенствами $r(\mathbf{G}/B) = |\mathbf{G}| = |B|$ (B — некоторая базисная подгруппа $\mathbf{G}$). Если группа $\mathbf{G}$ удовлетворяет этим равенствам, то (см. [6]) она имеет систему образующих типа (I) и систему образующих типа (VI) (см. теорему 3). Поэтому $\mathbf{G}$ обладает и системами образующих остальных типов (II), (III), (IV), (V) (см. [4]). Если группа $\mathbf{G}$ принадлежит $D(111111)$, то она имеет бесконечный ранг (см. [5]) и $r(\mathbf{G}/B) = |\mathbf{G}|$ по теореме 3. Далее $|B| = |\mathbf{G}|$ (см. [6]).

В. Класс $D(000110)$. Этому классу принадлежат все счетные группы вида $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + D$, где $\mathbf{G}_1$ — конечная, D — полная группа, $0 < r(D) < r(\mathbf{G}_1)$, и только они.

Как показано в работе [5], этими группами исчерпываются все счетные примарные группы класса $D(000110)$. Если группа $\mathbf{G}$ несчетна и не имеет систем образующих типа (VI), то по теореме 3 она имеет вид (5) $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2$, где $|\mathbf{G}| = |\mathbf{G}|$ и $\mathbf{G}_1$ разложима в прямую сумму циклических подгрупп. Но отсюда следует, что $\mathbf{G}$ обладает неприводимой системой образующих [6].

Г. Класс $D(000111)$. Группы бесконечного ранга этого класса характеризуются соотношением:

$$1 < |B| < |\mathbf{G}/B| = |\mathbf{G}| \tag{7}$$

(B — некоторая базисная подгруппа $\mathbf{G}$).

Действительно, если группа $\mathbf{G}$ удовлетворяет соотношениям (7), то она не обладает системами образующих типа (I) (см. [6]) и обладает системой образующих типа (VI) по теореме 3. Так как $\mathbf{G}$ — неполная группа, то у нее есть системы образующих типов (IV), (V) (см. [2]). Если $\mathbf{G} \in D(000111)$, то $|\mathbf{G}| > |B|$ (для любой базисной подгруппы B), так как в ней нет систем образующих типа (I) (см. [6]). Поскольку $\mathbf{G}$ обладает системой образующих типа (VI), $r(\mathbf{G}/B) \geqslant r(B)$. А так как $|\mathbf{G}| > B$, то $|\mathbf{G}/B| > |B|$. Среди групп конечного ранга классу $D(000111)$ принадлежат все группы вида $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + D$ где $\mathbf{G}_1 \neq 0$ — конечная, а D — полная группа, $r(D) \geqslant r(\mathbf{G}_1)$, и только они [5].

1. Д л а б В. Заметка к теории полных абелевых групп.— Чехосл. мат. журн., 1958, **8**(83), № 1, с. 54—61.
2. Д л а б В. Некоторые соотношения между системами образующих абелевых групп.— Чехосл. мат. журн., 1959, 9(**84**), № 2, с. 161—169.
3. D l a b V. On Characterization of Primary Abelian Groups of Bounded Order.— Journal of the London Mathematical Society, 1961, **36**, N 142, p. 139—**144**.
4. Л е б е д е н к о В. М. Абелевы группы со свойством (P).— Сиб. мат. журн., 1970, **11**, № 6, с. 1417—1418,— ВИНИТИ, 1971, 1499—70 Деп., 23 с.
5. Л е б е д е н к о В. М. О некоторых связях между типами систем образующих абелевых групп и их прямыми слагаемыми. Дубна, 1973. 36 с. Сообщения ОИЯИ Р5—7344.
6. K h a b b a z S. Abelian Torsion Groups Having a Minimal System of Generators.— Transactions of the American Mathematical Society, 1961, **98**, N 3, p. 527—539.
7. К у р о ш А. Г. Теория групп. М.: Наука, 1967. 648 с.
8. Ф у к с Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. т. 1—335 с. т. 11. М.:Мир, 1977. 416 с.

Объединенный институт
ядерных исследований

Поступила в редакцию
1.08.1979 г