УДК 517.5

А. А. Лигун

О приближении дифференцируемых периодических функций локальными сплайнами минимального дефекта

Пусть L_p ($p \in [1, \infty]$) — множество всех 2π-периодических функций из $L_p[0, 2\pi]$, C-пространство всех непрерывных на всей оси 2π-периодических функций с чебышевской нормой, а C^r ($r = 1, 2 \ldots$) — множество всех функций f у которых $f^{(r)} \in C$. Пусть далее $R = \pi/n$ и $t_{i,r} = iR + (1 + (1 -)^r) \times R/4$ ($i = 0 \pm 1, \ldots, r = 1, 2 \ldots$). Функцию $s_{n,r} \in C^{r-1}$ будем называть сплайн-функцией порядка r дефекта 1 с $2n$ равноотстоящими узлами (или просто сплайном), если на каждом из интервалов $(t_{i-1,r}, t_{i,r})$ ($1 = 0, \pm 1, \ldots$) она является алгебраическим многочленом степени $\leqslant r$. При фиксированных n и r множество всех сплайнов $s_{n,r}$ обозначим через $S_{n,r}$. Сплайн $s_{n,r}(f) \in S_{n,r}$ назовем интерполяционным для функции f, если его значения совпадают со значениями функции f в точках iR ($i = 0, \pm 1, \ldots$). Хорошо известно (см., например, [1] стр. 253), что для всякой 2π-периодической конечной в точках iR функции f интерполяционный сплайн $s_{n,r}(f)$ существует и единственный. Величина

$$H_{r,p} = \sup_{|s_{n,r}(iR)| \leqslant 1,\ i=1,2,\ldots,2n} \| s_{n,r} \|_p$$

называется константой Лебега сплайн интерполирования. При любых $r = 1, 2, \ldots$ и $p \in [1, \infty]$ эти константы ограничены (см., например, [1] стр. 132).

Пусть $\psi_0(t) = \begin{cases} 1 & (|t| \leqslant 0{,}5), \\ 0 & (|t| > 0{,}5). \end{cases}$

Положим $\psi_k(t) = \int\limits_{t-0,5}^{t+0,5} \psi_{k-1}(u)\, du$, $k = 1, 2, \ldots$ и $B_r(t) = \psi_r(t)/\psi_r(0)$.

Функция $B_r(t)$ называется фундаментальным B-сплайном порядка r. Определим периодический B-сплайн $B_{n,r}(t)$ равенством

$$B_{n,r}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_r(h^{-1}(t + 2k\pi)) \tag{1}$$

и положим

$$b_r = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k(k) \right)^{-1} = \left(B_r(0) + 2 \sum_{k=1}^{\left[\frac{r}{2}\right]} B_r(k) \right)^{-1}. \tag{2}$$

Для каждой функции $f \in C$ рассмотрим сплайны

$$s_{n,r,0}(f;\ t) = b_r \sum_{k=0}^{2n} f_k B_{n,r}(t-kh) = b_r \sum_{k:|h^{-1}t-k|<\frac{(r+1)}{2}} f_k B_r\left(\frac{t}{h}-k\right),\ f_k = f(kh). \tag{3}$$

Сплайны (3) — локальные сплайны из $S_{n,r}$. При нечетных r эти сплайны введены в работе [2].

Исходя из сплайнов $s_{n,r,0}(f)$ для $m = 1, 2, \dots$ определим сплайны $s_{n,r,m}(f)$ следующим образом

$$s_{n,r,m}(f) = s_{n,r,m-1}(f) + s_{n,r,0}(f - s_{n,r,m-1}(f)). \tag{4}$$

Для построения сплайна $s_{n,r,m}(f)$ на промежутке $[(k-1)h, nh]$ необходимо использовать информацию о значениях функции f в rm узлах, тогда как для построения интерполяционного сплайна $s_{n,r,m}(f)$—во всех $2n$ узлах. Кроме того, построение сплайна $s_{n,r,m}(f)$ легко программируется на ЭЦВМ, так как программу построения B-сплайнов $B_r(t)$ можно заранее ввести в ЭЦВМ, а фундаментальные интерполяционные сплайны при каждом n приходится строить заново. Так как $s_{n,r,0}(f)_i = b_r \sum\limits_{k=-\left[\frac{r}{2}\right]}^{\left[\frac{r}{2}\right]} f_{i+k} B_r(k)$, то $(f - s_{n,r,0}(f))_i = b_r \sum\limits_{k=1}^{\left[\frac{r}{2}\right]} (f_{i+k} - 2f_i + f_{i-k}) B_r(k)$. Следовательно найдутся числа $C_{r,k}$ $(k = 1, 2, \dots, [r/2])$ такие, что $(f - s_{n,r,0}(f))_i = \sum\limits_{k=1}^{\left[\frac{r}{2}\right]} C_{r,k}\Delta^{2k} f_i$, где $\Delta^0 f_i = f_i$, $\Delta^{2k} f(t) = \Delta^{2k-2} f(t+h) - 2\Delta^{2k-2} f(t) + \Delta^{2k-2} f(t-h)$, $\Delta^{2k} f_i = \Delta^{2k} f(ih)$. Учитывая этот факт и равенство

$$f - s_{n,r,m}(f) = (f - s_{n,r,m-1}(f)) - s_{n,r,0}(f - s_{n,r,m-1}(f))$$

заключаем, что для любого $m=1, 2 \dots$ существуют числа $C_{r,k,m}\left(k = m+1, \dots \right.$ $\left. \dots, (m+1)\left[\frac{r}{2}\right]\right)$ такие, что

$$(f - s_{n,r,m}(f))_i = \sum_{k=m+1}^{(m+1)\left[\frac{r}{2}\right]} C_{r,k,m}\Delta^{2k} f_i.$$

Но тогда

$$\max_i |(f - s_{n,r,m}(f))_i| \leqslant M_{r,m} \max_i |\Delta^{2m+2} f_i|,$$

где $M_{r,m} = \sum\limits_{k=m+1}^{(m+1)\left[\frac{r}{2}\right]} C_{r,k,m} 4^{k-m-1}$. А так как интерполяционный сплайн $s_{n,r}(f)$ совпадает с функцией f в точках ih, то и

$$\max_i |(s_{n,r,m}(f) - s_{n,r}(f))_i| \leqslant M_{r,m} \max_i |\Delta^{2m+2} f_i|.$$

Отсюда и из определения констант Лебега сплайн интерполирования следует, что

$$\| s_{n,r,m}(f) - s_{n,r}(f) \|_p \leqslant H_{r,p} M_{r,m} \max_i |\Delta^{2m+2} f_i|.$$

Таким образом, если $f \in C^{r+1}$, то для любого $m > (r+1)/2$ при $n \to \infty$

$$\| s_{n,r,m}(f) - s_{n,r}(f) \|_p = o\ (h^{r+1})\ (p \in [1, \infty]).$$

С другой стороны из работы [3] следует, что если $f \in C^{r+1}$, $f \not\equiv \text{const}$ то при $n \to \infty$

$$\| f - s_{n,r}(f) \|_p \geqslant \inf_{s \in S_{n,r}} \| f - s \|_p \geqslant O\,(h^{r+1}).$$

Это означает, что для любой функции $f \in C^{r+1}$ при $m > (r+1)/2$ сплайны $s_{n,r,m}(f)$ асимптотически совпадают с интерполяционными сплайнами $s_{n,r}(f)$ т. е. при $n \to \infty$

$$\| f - s_{n,r,m}(f) \|_p = (1 + o\,(1)) \| f - s_{n,r}(f) \|_p.$$

Для $r = 2$ и 3 сплайны $s_{n,r,m}(t)$ легко выписываются явно:

$$s_{n,2,m}(f;\ t) = \frac{3}{4} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \Delta^{2k} f_i B_{n,2}(t - ih) =$$

$$= \frac{3}{4} \sum_{i=|n^{-1}t-i|<1,5} \sum_{k=0} \left(-\frac{1}{8}\right)^k \Delta^{2k} f_i B_2\left(\frac{t}{h} - i\right).$$

$$s_{n,3,m}(f;\ t) = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=0}^{m} \left(-\frac{1}{6}\right)^k \Delta^{2k} f_i B_{n,3}(t - ih) =$$

$$= \frac{2}{3} \sum_{i:|h^{-1}t-i|<2} \sum_{k=0}^{m} \left(-\frac{1}{6}\right)^k \Delta^{2k} f_i B_3\left(\frac{t}{h} - i\right).$$

При этом $\|s_{n,2}(f) - s_{n,2,m}(f)\|_p \leqslant H_{2,p} \left(\frac{1}{8}\right)^{m+1} \max\limits_i |\Delta^{2m+2} f_i|$, и $\| s_{n,3}(f) -$ $- s_{n,3,m}(f) \|_p \leqslant H_{3,p} \left(\frac{1}{6}\right)^{m+1} \max\limits_i |\Delta^{2m+2} f_i|$.

1. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976.
2. Гребенников А. И. О явном методе аппроксимации функций одной и многих переменных сплайнами. Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1978, **18**, **№ 4,** с. 853—859.
3. Лигун А. А., Сторчай В. Ф. О наилучшем выборе узлов при приближении сплайнами в метрике L_p.— Мат. заметки, 1976, **20**, № 4, с. 611—618.

Днепродзержинский
индустриальный институт

Поступила в редакцию 20.03.1978 г.,
после переработки — 29.05.1979 г.