УДК 517.945

Л. П. Нижник, Р. В. Романенко

Условная устойчивость обратной нестационарной задачи рассеяния.

Известно, что в естественной постановке обратные задачи как правило являются некорректными. Это обстоятельство существенно сказывается при приближенных решениях. Одним из методов преодоления этих трудностей является метод регуляризации А. Н. Тихонова [2]. Центральным звеном этого метода является установление условной устойчивости задачи, т. е. установление непрерывной зависимости решения задачи от ее исходных данных, при априорном условии принадлежности решения некоторому множеству.

Среди обратных задач рассеяния подробно изученной условно устойчивой задачей является обратная задача рассеяния для уравнения Штурма — Лиувилля на полуоси [3, 4].

В настоящей работе изучается условная устойчивость обратной нестационарной задачи рассеяния на всей оси для гиперболической системы

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=\sigma\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}+u(x,t)\psi(x,t), \tag{1}$$

где $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, а $u(x,t)$ — матричный потенциал вида

$$u(x,t)=\begin{pmatrix}0 & u_1(x,t)\\ u_2(x,t) & 0\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Обратная задача рассеяния для системы уравнений (1), т. е. задача восстановления коэффициентов $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ по оператору рассеяния S, подробно изучена в работе [1] в предположении, что коэффициенты — комплекснозначные измеримые по x и t функции, удовлетворяющие оценке

$$|u_i(x,t)|\leqslant c[(1+|x|)(1+|t|)]^{-1-\varepsilon},\quad \varepsilon>0,\quad i=1,2. \tag{3}$$

При этом показано, что по оператору рассеяния система (1) восстанавливается однозначно, дана эффективная процедура такого восстановления, указаны необходимые и достаточные условия, когда наперед заданный оператор является оператором рассеяния для системы (1) с потенциалом, удовлетворяющим оценке (3).

Приведем некоторые результаты работы [1], которые будут использоваться в дальнейшем.

Оператор рассеяния S для системы уравнений (1) — матричный оператор в пространстве $L_2(-\infty,\ \infty;\ E^2)$, отличающийся от единичного на интегральный оператор Гильберта—Шмидта. Известно, что оператор $\Gamma_x S\Gamma_{-x}$ допускает факторизацию

$$\Gamma_x S\Gamma_{-x}=(I+K_-(x))^{-1}(I+K_+(x)), \tag{4}$$

где $\Gamma_x=\mathrm{diag}\{T_x,\ T_{-x}\}$ — матричный оператор сдвига; $T_xf(t)=f(t+x)$ — обычный оператор сдвига. Фигурирующие в формуле (4) операторы $K_-(x)$, $K_+(x)$ — матричные интегральные вольтерровы операторы с переменным, соответственно, нижним и ерхним пределом интегрирования. Эти операторы однозначно определяются системой (1) и их ядра связаны с потенциалом (2) равенствами

$$u(x,t)=\sigma K_-(x;t,t)\sigma-K_-(x;t,t),\qquad u(x,t)=K_+(x;t,t)-\sigma K_+(x;t,t)\sigma. \tag{5}$$

Из формул (4), (5) следует алгоритм решения обратной задачи рассеяния для системы (1).

Для изучения условной устойчивости обратной нестационарной задачи рассеяния установим связь между разностью потенциалов и разностью соответствующих им операторов рассеяния.

Лемма. *Пусть $S^{(i)}$ — операторы рассеяния для систем гиперболических уравнений вида* (1) *с потенциалами $u^{(i)}(x, t)$, $(i = 1, 2)$, удовлетворяющими оценке* (3). *Тогда оператор-функция*

$$R(x) = (I + K_{-}^{(2)}(x))\,\Gamma_x\,(S^{(2)} - S^{(1)})\,\Gamma_{-x}\,(I + K_{+}^{(1)}(x))^{-1} \tag{6}$$

— матричный интегральный оператор, ядро которого $R(x; t, s)$ связано с потенциалами $u^{(1)}(x, t)$, $u^{(2)}(x, t)$ равенством

$$u^{(1)}(x, t) - u^{(2)}(x, t) = \sigma R(x;\ t, t)\,\sigma - R(x;\ t, t). \tag{7}$$

Доказательство. Операторы $S^{(i)}$ допускают факторизацию вида (4) с вольтерровыми операторами $K_{\pm}^{(i)}(x)$, $(i = 1,\ 2)$. Используя эти представления, путем несложных преобразований можно получить равенство

$$\begin{aligned}(I + K_{-}^{(2)}(x))\,\Gamma_x\,(S^{(2)} - S^{(1)})\,\Gamma_{-x}\,(I + K_{+}^{(1)}(x))^{-1} = (K_{-}^{(1)}(x) - K_{-}^{(2)}(x)) \times \\ \times (I + K_{-}^{(1)}(x))^{-1} - (K_{+}^{(1)}(x) - K_{+}^{(2)}(x))\,(I + K_{+}^{(1)}(x))^{-1}.\end{aligned} \tag{8}$$

Левая часть равенства (8) — матричный интегральный оператор $R(x)$ с ядром $R(x; t, s)$. Из (8) следует

$$\begin{aligned}R(x;\ t, t + 0) &= K_{-}^{(1)}(x;\ t, t) - K_{-}^{(2)}(x;\ t, t),\\ R(x;\ t, t - 0) &= K_{+}^{(2)}(x;\ t, t) - K_{+}^{(1)}(x;\ t, t).\end{aligned} \tag{9}$$

В силу (9) из равенств (5) получаем равенство (7). Лемма доказана.

Связь (6), (7) между разностью потенциалов и разностью соответствующих им операторов рассеяния дает возможность получить соотношения между нормами этих величин. Для этого нужно получить априорные оценки окаймляющих $(S^{(2)} - S^{(1)})$ множителей в формуле (6), исходя из априорных ограничений на потенциалы.

Теорема. *Если коэффициенты $u^{(i)}(x, t)$ двух систем вида* (1) *соответствуют операторам рассеяния $S^{(i)}$ и удовлетворяют оценке* (3), *то существует постоянная A, зависящая от c и ε, такая, что*

$$|u^{(1)}(x, t) - u^{(2)}(x, t)| \leqslant A(c, \varepsilon) \sup_{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{F}^{(1)}(\xi, \omega) - \widetilde{F}^{(2)}(\xi, \omega)|\, d\omega, \tag{10}$$

где $\widetilde{F}^{(i)}(\xi, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta)\, e^{i\eta\omega} d\eta$ *— преобразование Фурье по второй переменной ядра $F^{(i)}(\xi, \eta)$ оператора $F^{(i)} = S^{(i)} - I$, $(i = 1, 2)$.*

Доказательство теоремы следует из леммы и оценок на ядра операторов преобразования [1] при априорной оценке (3) на потенциалы.

Неравенство (10) выражает условную устойчивость обратной нестационарной задачи рассеяния для гиперболической системы (1) на всей оси в классе потенциалов, допускающих оценку вида (3) с фиксированными c и ε. При этом разность потенциалов оценивается в норме L_{∞}, а норма разности операторов рассеяния определяется правой частью неравенства (10).

1. Нижник Л. П. Обратная нестационарная задача рассеяния. Киев: Наук. думка, 1973. 182 с.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 286 с.
3. Марченко В А. Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля. Киев: Наук. думка, 1972. 219 с.
4. Лундина Д. Ш., Марченко В. А. Уточнение неравенств, характеризующих устойчивость обратной задачи теории рассеяния. —Мат сб., 1969, 78, № 4, с. 475—484.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
17.07.80 г.