УДК 519.41

С. Н. Черников, Д. И. Зайцев, Я. П. Сысак

О. Ю. Шмидт и теория групп

30 сентября 1981 года исполняется 90 лет со дня рождения Героя Советского Союза академика Отто Юльевича Шмидта. Выдающийся ученый, организатор и непосредственный участник арктических экспедиций, крупный общественный деятель — Отто Юльевич был человеком исключительной эрудиции, огромной творческой энергии. Он широко известен также как крупный математик-алгебраист, создатель московской алгебраической школы и как автор фундаментальных исследований по теории групп. Работы О. Ю. Шмидта [1] и [2] вошли в золотой фонд теории групп. Его замечательная монография [3], [4, с. 17 — 175] отразила новейшие для своего времени достижения в теории конечных групп: в ней впервые в мировой литературе основы теории групп излагались без предположения о конечности порядка группы.

В предисловии к своей книге (см. [3]) О. Ю. Шмидт отмечает, что при ее написании была принята во внимание вся журнальная литература по теории групп и что многие теоремы получили в ней новые доказательства. К этому можно добавить, что некоторые теоремы в ней существенно обобщены и дополнены. Например, известная теорема Ремака, относящаяся к прямым разложениям конечной группы на неразложимые множители, дополнена утверждением о возможности замены любого множителя из любого разложения некоторым центрально изоморфным множителем из другого ее разложения. Теореме Ремака посвящена первая работа О. Ю. Шмидта, опубликованная им еще в годы учебы в Киевском университете в Университетских известиях.

Книга [3] дает если не достаточно полное, то во всяком случае достаточно отчетливое отражение всех направлений исследований, которые в свое время возникли в абстрактной теории конечных групп, в частности, направления теоретико-групповых исследований, имеющего своей целью изучение групп с заданными свойствами системы подгрупп (определившей со временем основные темы работ О. Ю. Шмидта). Это направление представлено в ней теоремой об элементарных группах (т. е. группах, не имеющих собственных характеристических подгрупп) и результатами, относящимися к конечным специальным (иначе—нильпотентным) группам и, в частности, к конечным гамильтоновым группам.

Определяя конечные специальные группы как конечные, группы представимые в виде прямого произведения своих силовских подгрупп, О. Ю. Шмидт показывает (см. [3]), что эти группы и только они являются такими конечными группами, в которых каждая собственная подгруппа отлична от своего нормализатора (нормализаторное условие). Приведенный пример использования нормализаторного условия в теории конечных групп способствовал привлечению этого условия для изучения бесконечных групп и прежде всего бесконечных групп, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп [5—7]. Бесконечным группам с нормализаторным условием посвящена работа О. Ю. Шмидта [8].

Среди работ О. Ю. Шмидта, посвященных конечным группам, исключительная роль как по содержанию, так и по влиянию, оказанному на развитие теории конечных групп, принадлежит упоминавшейся выше работе [1], в которой О. Ю. Шмидт исследовал основные свойства конечных ненильпотентных групп, все собственные подгруппы которых нильпотентны. Используя лишь теорему Силова и элементарные свойства нильпотентных групп, он, в частности, установил, что такие группы, получившие впоследствии название (конечных) групп Шмидта, разрешимы, их порядок — произведение $p^{\alpha}q^{\beta}$ ненулевых степеней только двух различных простых чисел и в них в точности одна из силовских подгрупп (скажем, порядка q^{β}) нормальна, а силовская p-подгруппа — циклическая, причем ее подгруппа порядка $p^{\alpha-1}$ содержится в центре всей группы. Дальнейшим исследованиям конечных групп Шмидта посвящены работы [9, 10]. Кроме того, изучались также группы автоморфизмов групп Шмидта [11]. Заметим, что знание детального строения групп Шмидта необходимо для многих целей. Например, в доказательствах нильпотентности конечной группы или же в доказательствах существования в ней нормального p-дополнения группы Шмидта часто естественным образом появляются в качестве «минимального контрпримера». Что же касается исследований, посвященных тем или иным обобщениям групп Шмидта, то они столь многочисленны и столь разнообразны как по форме, так и по результатам, что к настоящему времени составляют целое направление в теории конечных групп. Достаточно полная информация о таких исследованиях содержится в обзоре [12], а относящиеся сюда задачи, идеи и новые результаты отражены в главе VI книги [13].

Идея изучения групп с заданными свойствами подгрупп отчетливо выражена и в двух других работах О. Ю. Шмидта ([14] и [15]), где описано строение тех конечных групп, у которых все подгруппы, кроме одного или двух классов сопряженных подгрупп нормальны. Этими работами положено начало исследованиям групп с заданными системами нормальных подгрупп. В первой из них получена замечательная характеризация конечных нильпотентных групп как групп, все максимальные подгруппы которых нормальны, послужившая впоследствии основой многих работ по конечным группам.

В 1928 году вышла из печати одна из самых известных работ О. Ю. Шмидта [2]. В ней Отто Юльевич Шмидт четко формулирует общую идею выделения таких классов бесконечных групп, «чтобы, с одной стороны, для них еще сохранялись основные теоремы теории конечных групп, с другой стороны, область применимости их была бы достаточно обширной». Эта работа посвящена перенесению упоминавшейся теоремы Ремака на достаточно широкие классы бесконечных групп. В работе [2] вводится так называемый класс групп с конечной цепью, т. е. класс, в котором ни от какой нормальной подгруппы не может исходить ни убывающая, ни возрастающая бесконечная нормальная цепь подгрупп. При этом рассматриваются операторные группы — допускается наличие у групп произвольной, вообще говоря, области операторов, что существенно расширяет сферу применимости получаемых результатов. Группы с конечной цепью обладают конечным композиционным рядом; для них, как отмечает О. Ю. Шмидт, справедлива теорема Жордана-Гельдера о композиционных рядах. Основной результат — следующая теорема:

множители любых двух разложений операторной группы в прямое произведение (допустимых) неразложимых множителей попарно центрально изоморфны и в каждом разложении каждый множитель может быть заменен некоторым центрально изоморфным множителем из другого разложения.

Если в область операторов группы включить все ее внутренние автоморфизмы, то можно увидеть, что эта теорема справедлива для произвольных операторных групп с конечным главным рядом. В качестве весьма частных случаев из теоремы Шмидта вытекают теорема Ремака о конечных группах (без операторов) и аналогичная теорема Крулля для коммутативных групп (без утверждения о взаимной заменяемости множителей).

Теорема Шмидта сразу же была оценена современниками как выдающийся математический результат. По словам академика П. С. Александрова, она «принадлежит к фундаментальным большим открытиям, которые навсегда останутся в науке» [16]. Влияние теоремы Шмидта на развитие теории групп и других разделов алгебры очень велико. Она переносилась в теорию колец, теорию структур и других алгебраических систем и использовалась в новых областях. В теории групп под ее влиянием сложилось целое направление, связанное с изучением прямых разложений групп, нашедшее свое отражение в отечественной и зарубежной литературе [17].

Работа О. Ю. Шмидта «О бесконечных группах с конечной цепью» — яркий пример использования условий конечности при изучении бесконечных групп, а именно: условий минимальности и максимальности для подгрупп. С условием минимальности связаны и две другие работы О. Ю. Шмидта — [8] и [18]. Эти работы сыграли существенную роль в развитии теории обобщенно нильпотентных и обобщенно разрешимых групп.

В работе [18] О. Ю. Шмидт вводит понятие разрешимой группы как группы, любая фактор-группа каждой подгруппы которой обладает разрешимым множеством. Он предлагает классификацию разрешимых групп по типу упорядоченности их разрешимых множеств, изучает строение разрешимых групп с условием минимальности для подгрупп. В этих же работах Отто Юльевич с присущим ему мастерством строит ряд примеров бесконечных групп, используя при этом, по существу, конструкцию сплетения групп, получившую со временем широкое распространение в различных разделах теории групп. Кроме того, в отмеченных работах О. Ю. Шмидт впервые вводит в рассмотрение условие минимальности для абелевых подгрупп в связи с чем в теории групп возник важный вопрос, будет ли оно равносильно условию минимальности для всех подгрупп. Впоследствии аналогичные вопросы возникали и изучались для других условий конечности, например, условия максимальности, условия конечности ранга и др. На пути развития этого направления исследований был получен ряд глубоких и тонких результатов, многие из которых принадлежат советским алгебраистам (С. Н. Черников, А. И. Мальцев, М. И. Каргаполов, В. С. Чарин, Ю. М. Горчаков, Ю. И. Мерзляков, В. П. Шунков, Д. И. Зайцев и др.).

С именем О. Ю. Шмидта связана известная проблема о том, существует ли некоммутативная бесконечная группа, все собственные подгруппы которой конечны, получившая название проблемы Шмидта. Подробно об истории ее возникновения рассказано в [20]. Как показали дальнейшие исследования, проблема Шмидта тесно связана в первую очередь с вопросом о существовании в бесконечных группах бесконечных абелевых подгрупп. Первые примеры бесконечных групп, все абелевы подгруппы которых конечны, построены в [21]. В работе [22] построена такая бесконечная группа, все собственные подгруппы которой имеют простые порядки.

Тем самым получено решение проблемы Шмидта, а вместе с ней и известной проблемы Черникова.

Приведенные сведения об О. Ю. Шмидте дают определенное представление о значительности его вклада в теорию групп, однако они далеки от того, чтобы дать хотя бы какое-нибудь представление о его широкой многогранной деятельности. О. Ю. Шмидтом внесен значительный вклад в космогонию, геофизику и географию, он — выдающийся деятель советской культуры, им проделана громадная работа по изданию БСЭ (первое издание), по редактированию журналов «Естествознание и марксизм», «Математический сборник», «Известия АН СССР, серия геофизическая», «Природа» и др.

Многие важные сведения о научной и общественной деятельности О. Ю. Шмидта можно найти в книге [4].

1. Шмидт О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные.— Мат. сб., 1924., 31, № 3, с. 366—372.
2. Schmidt O. Ju. Über unendliche Gruppen mit endlicher Kette. —Math. Z., 1928, 29, S. 34—41.
3. Шмидт О. Ю. Абстрактная теория групп. Киев: изд-во Киевского ун-та, 1916. 222 с.
4. Шмидт О. Ю. Избранные труды. М.: изд-во АН СССР, 1959. 316 с.
5. Черников С. Н. Бесконечные специальные группы. —Мат. сб., 1939, 6 (48), № 2, с. 199—214.
6. Черников С. Н. Бесконечные локально разрешимые группы. Мат. сб., 1940, 7(49), № 1, с. 35—64.
7. Черников С. Н. К теории бесконечных специальных групп. Мат. сб., 1940, 7(49), № 4, с. 539—548.
8. Шмидт О. Ю. О бесконечных специальных группах. —Мат. сб., 1940, 8(50), № 3, с. 363—375.
9. Гольфанд Ю. А. О группах, все подгруппы которых специальные.— Докл. АН СССР, 1948, 60, № 8, с. 1313—1315.
10. Redei L. Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen. — Publ. Math. Debrecen, 1956, 4, S. 303—324.
11. Нагребецкий В. Т., Адамов С. Н. О группах автоморфизмов групп Шмидта.— Мат. зап. Уральск. ун-та, 1970, 7, № 3, с. 133—136.
12. Шеметков Л. А. О. Ю. Шмидт и конечные группы. —Укр. мат. журн., 1971, 23, № 5, с. 586—590.
13. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1980. 271 с.
14. Шмидт О. Ю. Группы, имеющие только один класс неинвариантных подгрупп.— Мат. сб., 1926, 33, № 2, с. 161—172.
15. Шмидт О. Ю. Группы с двумя классами неинвариантных подгрупп. —В кн.: Труды семинара по теории групп. М. —Л.: Гонти, 1938, с. 7—26.
16. Александров П. С. Воспоминания об О. Ю. Шмидте. —В кн.: Отто Юльевич Шмидт. М.: изд-во АН СССР, 1959, с. 171—177.
17. Курош А. Г. Теория групп. М.: Наука, 1967. 648 с.
18. Шмидт О. Ю. Бесконечные разрешимые группы. —Мат. сб., 1945, 17 (59), № 2, с. 145—162.
19. Черников С. Н. К теории локально разрешимых групп. —Мат. сб., 1943, 13(55), № 3, с. 317—333.
20. Черников С. Н. О проблеме Шмидта. —Укр. мат. журн., 1971, 23, № 5, с. 598—603.
21. Новиков П. С., Адян С. И. О коммутативных подгруппах и проблеме сопряженности в свободных периодических группах нечетного порядка. —Изв. АН СССР. Сер. мат., 1968, 32, № 5, с. 1176—1190.
22. Ольшанский А. Ю. Бесконечная группа с подгруппами простых порядков.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1980, 44, № 2, с. 309—321.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
24.03.1981 г.