УДК 517.53

В. В. Андриевский

Геометрические свойства областей В. К. Дзядыка

В работах [1—3] построены аппроксимационные полиномы, позволившие получить прямые теоремы теории приближения функций, на множествах от которых требовалась принадлежность специальным образом введенным классам B_k, B_k^0, B_k^* (k — натуральное число) [3, с. 392, 439—440].

Цель данной работы — описание геометрических свойств областей класса $D = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k^*$. В основу исследований положен метод конформных инвариантов, разработанный применительно к задачам теории приближения в [4].

1. Основные определения и результаты. Пусть G — произвольная конечная область комплексной плоскости, ограниченная жордановой кривой $L = \partial G$; $\Omega = C\overline{G}$ — дополнение области $\overline{G}$. Обозначим через $\Phi(z)$ функцию, конформно и однолистно отображающую Ω на $\Omega' = \{w : |w| > 1\}$ с нормировкой $\Phi(\infty) = \infty$, $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$.

Продолжим $\Phi(z)$ непрерывно на L, сохранив для продолженной функции обозначение Φ, а обратную к ней функцию обозначим через Ψ.

Наряду с общепринятым символом $\asymp$, будем пользоваться символом $\preccurlyeq$ ($a \preccurlyeq b$ означает, что $a \leqslant cb$, где $c = \mathrm{const} > 0$). Для произвольных $\xi \in L$ и $R > 1$ положим $\tilde{\xi}_R \overset{\mathrm{df}}{=} \Psi[R\Phi(\xi)]$, $L_R \overset{\mathrm{df}}{=} \{\xi : \xi \in \Omega;\ |\Phi(\xi)| = R\}$.

Лемма 1. *Пусть* $G \in D$, *тогда*

1) *если* $\zeta \in \Omega$, $\zeta_L \overset{\mathrm{df}}{=} \Psi[\Phi(\zeta)\,|\Phi(\zeta)|^{-1}]$, *то*

$$d(\zeta, L) \overset{\mathrm{df}}{=} \inf_{z\in L} |\zeta - z| \asymp |\zeta - \zeta_L|; \tag{1}$$

2) *если* $z, \zeta \in L$, $R > 1$, $|z - \zeta| \preccurlyeq |z - \tilde{z}_R|$, *то*

$$|\zeta - \tilde{\zeta}_R| \asymp |z - \tilde{z}_R|; \tag{2}$$

3) *любые точки* z *и* $\zeta \in L$ *можно соединить дугой* $\gamma(z, \zeta) \subset G$, *длина которой удовлетворяет неравенству*

$$\mathrm{mes}\,\gamma(z, \zeta) \preccurlyeq |z - \zeta|. \tag{3}$$

Доказательство леммы приведено в п. 2.

Рассмотрим некоторые более общие классы.

Определение 1. Будем говорить, что $G \in H$, если любые точки z и $\zeta \in L = \partial G$ можно соединить дугой $\gamma(z, \zeta) \subset \overline{G}$, длина которой удовлетворяет условию (3).

Пусть $z \in L$, через $\gamma_z(r) \subset \Omega$, $r > 0$, обозначим дугу на окружности $\{_z\xi : |\xi - z| = r\}$, отделяющую в Ω точку z от ∞. Если $\gamma_z(r)$ определяется неоднозначно, то договоримся выбирать ее так, чтобы при разбиении области Ω дугой $\gamma_z(r)$ на две подобласти неограниченная подобласть была максимально возможной при данных z и r.

Если $0<r<R\leqslant\frac{1}{2}\operatorname{diam}G$, то $\gamma_z(r)$ и $\gamma_z(R)$ служат сторонами некоторого четырехсторонника $Q_z(r, R)$, две другие стороны которого — части кривой L. Через $m_z(r, R)$ обозначим модуль этого четырехсторонника, т. е. модуль семейства кривых, разделяющих в $Q_z(r, R)$ стороны $\gamma_z(r)$ и $\gamma_z(R)$ (см. [5]).

Определение 2. Пусть $G\in H$. Зафиксируем положительное число $\varepsilon=\varepsilon(G)\leqslant\frac{1}{2}\operatorname{diam}G$. Будем говорить что $G\in H^*$, если $\forall z$ и $\zeta\in L$, $|z-\zeta|<<\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|m_z(|z-\zeta|, \varepsilon)-m_\zeta(|z-\zeta|, \varepsilon)|\leqslant 1. \tag{4}$$

Отметим геометричность условия (4). Хотя модуль четырехсторонника не является, в строгом смысле слова, геометрической характеристикой, связь модулей четырехсторонников с их конфигурацией хорошо изучена (см., например, [6]).

Дадим удобный для работы с отображающими функциями Φ и Ψ критерий принадлежности произвольной области классу H^*, доказательство которого содержится в п. 3.

Лемма 2. *Пусть $G\in H$. Следующие условия эквивалентны* 1) $G\in H^*$; 2) $\forall R>1$; z, $\zeta\in L$, $|z-\zeta|\leqslant|z-\tilde{z}_R|$ *выполняется соотношение* (2).

Отметим некоторые свойства областей класса H^*, вытекающие из леммы 2.

Лемма 3. *Пусть $G\in H^*$; z, $\zeta\in L$, $R>1$; тогда*

$$\rho_R(z)\overset{\mathrm{df}}{=}\inf_{\xi\in L_R}|\xi-z|\asymp|z-\tilde{z}_R|; \tag{5}$$

$$\left|\frac{\tilde{\zeta}_R-\zeta}{\tilde{\zeta}_R-z}\right|\leqslant\left|\frac{\tilde{z}_R-z}{\tilde{\zeta}_R-z}\right|^\alpha,\quad \alpha=\alpha(G)=\mathrm{const}>0. \tag{6}$$

Сопоставляя леммы 1 — 3 с определением классов B_k^* [3, с. 440], приходим к следующим выводам.

Теорема. *Для того, чтобы $G\in D$ необходимо и достаточно, чтобы $G\in H^*$, а для $L=\partial G$ выполнялось следующее условие: $\forall z$ и $\zeta\in L$ длина $s(z,\zeta)$ части кривой L, попавшей в круг $\{\xi:|\xi-z|\leqslant|z-\zeta|\}$ удовлетворяла неравенству*

$$s(z,\zeta)\leqslant|z-\zeta|. \tag{7}$$

Следствие 1. *Область G, ограниченная кривой*

$$L=\partial G=[0,-1]\cup\{\zeta:|\zeta|=1;\ \operatorname{Im}\zeta\leqslant 0\}\cup$$

$$\cup\left(\bigcup_{n=2}^{\infty}\left\{\zeta:\left|\zeta-\frac{3}{2^n}\right|=\frac{1}{2^n};\ \operatorname{Im}\zeta\leqslant 0\right\}\right),$$

принадлежит классу D.

2. Геометрия областей класса H. Доказательство леммы 1. Соотношение (1) доказано в [3, с. 393]. Эквивалентность (2) следует из определения классов B_k^* [3, с. 440]. Установим справедливость свойства (3). Пусть z, $\zeta\in L$, причем интервал (z,ζ), лежит в Ω и, следовательно, разбивает Ω на две подобласти — конечную и бесконечную. Дугу границы L, лежащую между z и ζ, которая вместе с $[z,\zeta]$ — граница конечной подобласти, обозначим через $\gamma_L(z,\zeta)$. Тогда

$$\operatorname{mes}\gamma_L(z,\zeta)\leqslant|z-\zeta|. \tag{8}$$

Для доказательства оценки (8), учитывая определение классов B_k^*, достаточно показать, что

$$\operatorname{diam} \gamma_L (z, \zeta) \leqslant |z - \zeta|. \tag{9}$$

Пусть $\xi \in \gamma_L (z, \zeta)$. Через $\xi_1 \in [z, \zeta]$ обозначим точку (или одну из точек), для которой

$$\arg \Phi (\xi_1) = \arg \Phi (\xi).$$

Согласно неравенству (1) $d (\xi, [z, \zeta]) \leqslant |\xi - \xi_1| \asymp d (\xi_1, L) \leqslant |z - \zeta|$, откуда следует соотношение (9).

Пусть z и ζ — произвольные точки границы L. Соединим их отрезком $[z, \zeta]$. Искомую дугу $\gamma (z, \zeta) \subset \overline{G}$ удовлетворяющую условию (3) построим из частей отрезка $[z, \zeta]$, лежащих в $\overline{G}$ и частей границы L, заменяя ими те интервалы отрезка $[z, \zeta]$, которые полностью лежат в Ω.

Предположим, что $G \in H$, C_1, C_2, ... — положительные константы, зависящие только от G. Для произвольных точек $z \in L$, ζ_1 и $\zeta_2 \in \overline{\Omega}$ через $\Gamma (z, \zeta_1; \zeta_2; \Omega)$ обозначим семейство локально спрямляемых дуг и кривых, отделяющих в Ω точки z и ζ_1 от ζ_2 и ∞. Модуль этого семейства обозначим соответственно через $m (z, \zeta_1; \zeta_2; \Omega)$ [4].

Непосредственно из определения 1 вытекает справедливость леммы.

Лемма 4. *Пусть дуга $\gamma \subset \Omega$ отделяет точку $z \in L$ от ∞, $\zeta \in \gamma$; тогда*

$$\operatorname{mes} \gamma \geqslant |z - \zeta|.$$

Следствие 2. *В предположениях леммы 4 положим*

$$\rho_{z,\zeta} (\xi) = \begin{cases} |\xi - z|^{-1}, & \xi \in \Omega, \quad e^{-1} \leqslant \left| \dfrac{\xi - z}{\zeta - z} \right| \leqslant e; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad \textit{Тогда} \quad \int\limits_{\gamma} \rho_{z,\zeta} (\xi) \, |d\xi| \geqslant 1.$$

Следствие 3. *Отображающая функция $\Phi (\zeta)$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\sup\limits_{\zeta \in \gamma_z(r)} |\Phi (\zeta) - \Phi (z)|}{\inf\limits_{\zeta \in \gamma_z(r)} |\Phi (\zeta) - \Phi (z)|} \leqslant 1, \ z \in L, \ r > 0.$$

Пусть $z \in L$. Положим $\Gamma_z = \{\zeta : \zeta \in \Omega; \arg \Phi (\zeta) = \arg \Phi (z)\}$, для $\zeta \in \overline{\Omega}$ через $r_z (\zeta)$ обозначим точную верхнюю грань тех $r > 0$, для которых дуга $\gamma_z (r)$ разделяет в Ω точки z и ζ. Непосредственно из определения 1 вытекает соотношение

$$r_z (\zeta) \geqslant |z - \zeta|. \tag{10}$$

Лемма 5. *Пусть $\zeta \in \Omega$, тогда справедливо соотношение* (1).

Доказательство. Пусть $d (\zeta, L) = |\zeta - z|$, $z \in L$. Согласно неравенству (10) достаточно рассмотреть только случай, когда $r_z (\zeta_L) > |\zeta - z|$, т. е. множество дуг $\gamma_z (r)$, отделяющих в Ω точки z и ζ от ζ_L непусто. Поэтому

$$C_1 \geqslant m (\Phi (z), \Phi (\zeta); \Phi (\zeta_L); \Omega') = m (z, \zeta; \zeta_L; \Omega) \geqslant \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_z (\zeta_L)}{|\zeta - z|} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z - \zeta_L}{z - \zeta} \right| - C_2.$$

Откуда следует соотношение (1).

Пусть $z \in L$, $\zeta \in \Gamma_z$. Через $\Gamma_z (\zeta)$ обозначим часть дуги Γ_z, лежащую между точками z и ζ. Пользуясь соотношением (10) и поступая по аналогии с доказательством леммы 5 легко убедиться в справедливости неравенства

$$|z - \xi| \leqslant |z - \zeta|, \ \xi \in \Gamma_z (\zeta). \tag{11}$$

Лемма 6. *Пусть $z \in L$, $\zeta \in \Gamma_z$, тогда $r_z (\zeta) \asymp |z - \zeta|$.*

Доказательство. В силу неравенства (10) достаточно убедиться в справедливости оценки $r_z(\zeta) \leqslant |z-\zeta|$, которая вытекает из соотношения (11), так как при большом фиксированном $M = M(G) > 0$ дуга $\gamma_z(M|z-\zeta|)$ будет отделять точки z и ζ от ∞.

Неравенство (11) допускает легко проверяемое обобщение.

Лемма 7. *Пусть $z \in L$, ζ_1 и $\zeta_2 \in \Gamma_z$; $w = \Phi(z)$, $w_1 = \Phi(\zeta_1)$, $w_2 = \Phi(\zeta_2)$. Тогда условия $|z-\zeta_1| \leqslant |z-\zeta_2|$ и $|w-w_1| \leqslant |w-w_2|$ эквивалентны.*

Лемма 8. *Пусть $z \in L$, ζ_1 и $\zeta_2 \in \Gamma_z$, $|z-\zeta_1| \leqslant |z-\zeta_2|$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z-\zeta_2}{z-\zeta_1} \right| - C_3 \leqslant m(z, \zeta_1; \zeta_2; \Omega) \leqslant \frac{1}{\alpha\pi} \ln \left| \frac{z-\zeta_2}{z-\zeta_1} \right| + C_4,$$
$$\alpha = \alpha(G) = \text{const} > 0. \tag{12}$$

Доказательство. Установим справедливость правой части неравенства (12). Для этого рассмотрим функцию

$$\rho(\xi) = \begin{cases} |\xi - z|^{-1}; & M^{-1}|z-\zeta_1| \leqslant |z-\xi| \leqslant M|z-\zeta_2|; \\ 0; & \text{во всех остальных случаях,} \end{cases}$$

где достаточно большая константа $M = M(G) > 0$ выбрана таким образом, чтобы дуга $(\Gamma_z(\zeta_1) \cup \Gamma_z(\zeta_2)) \diagdown (\Gamma_z(\zeta_1) \cap \Gamma_z(\zeta_2))$ лежала в кольце $\{\xi : eM^{-1}|z-\zeta_1| \leqslant |z-\xi| \leqslant e^{-1}M|z-\zeta_2|\}$.

В силу следствия 2 имеем $L_\rho \overset{\text{df}}{=} \inf\limits_{\gamma \in \Gamma(z, \zeta_1; \zeta_2; \Omega)} \int\limits_\gamma \rho |d\xi| \geqslant 1$; $A_\rho \overset{\text{df}}{=} \iint\limits_{\text{пл.}\xi} \rho^2 d\sigma_\xi = 2\pi \ln M^2 \left| \frac{z-\zeta_2}{z-\zeta_1} \right|$; откуда находим

$$m(z, \zeta_1; \zeta_2; \Omega) \leqslant \frac{A_\rho}{L_\rho^2} \leqslant \frac{1}{\alpha\pi} \ln \left| \frac{z-\zeta_2}{z-\zeta_1} \right| + C_4.$$

Докажем справедливость левой части неравенства (12). Не ограничивая общности, предположим, что $r_z(\zeta_2) > r_z(\zeta_1)$. Тогда согласно известным свойствам модулей [5] имеем

$$m(z, \zeta_1; \zeta_2; \Omega) \geqslant \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_z(\zeta_2)}{r_z(\zeta_1)} \geqslant \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z-\zeta_2}{z-\zeta_1} \right| - C_3,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 4. *Сопоставляя лемму 8 и результаты работы* [4], *получим*

$$\left| \frac{w-w_1}{w-w_2} \right|^2 \leqslant \left| \frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2} \right| \leqslant \left| \frac{w-w_1}{w-w_2} \right|^\alpha. \tag{13}$$

Следствие 5. *Пусть $z \in L$, $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{diam} G$, $r_1 < \varepsilon$, $r_2 < \varepsilon$. Тогда для того, чтобы выполнялось соотношение $|m_z(r_1, \varepsilon) - m_z(r_2, \varepsilon)| \leqslant 1$, необходимо и достаточно, чтобы $r_1 \asymp r_2$.*

3. Области класса H^*. Доказательство леммы 2. Не ограничивая общности рассуждения, проведем для достаточно малого $R-1$. Покажем, как из условия 1) вытекает условие 2).

Пусть z и $\zeta \in L$. Предположим, что $|z-\zeta| \asymp |z-\tilde{z}_R|$. Так как $R-1 \asymp \exp\{-\pi m_z(|z-\tilde{z}_R|, \varepsilon)\} \asymp \exp\{-\pi m_\zeta(|\zeta-\tilde{\zeta}_R|, \varepsilon)\}$ (см. [7]), то согласно предположению и следствию 5 $|\zeta-\tilde{\zeta}_R| \asymp |\zeta-z| \asymp |z-\tilde{z}_R|$.

Пусть $|z-\zeta|\leqslant|z-\tilde{z}_R|$. Тогда найдется такая точка $\xi\in L$, что $|\xi-z|\asymp|\xi-\zeta|\asymp|z-\tilde{z}_R|$. Согласно уже разобранному случаю $|\xi-\tilde{\xi}_R|\asymp|z-\tilde{z}_R|\asymp|\zeta-\tilde{\zeta}_R|$.

Теперь покажем, как из условия 2) следует условие 1). Пусть z и $\zeta\in L$, $|z-\zeta|<\varepsilon$, R_1 и R_2 удовлетворяют равенству $|\zeta-\tilde{\zeta}_{R_1}|=|z-\zeta|=|z-\tilde{z}_{R_2}|$.

Согласно предположению и лемме 7 $R_1-1\asymp R_2-1$, следовательно $G\in H^*$.

Доказательство леммы 3. Пусть $\rho_R(z)=|z-\tilde{\zeta}_R|$, $\zeta\in L$. Согласно леммам 2 и 5 имеем $|z-\tilde{z}_R|\geqslant|z-\tilde{\zeta}_R|\geqslant|\tilde{\zeta}_R-\zeta|\asymp|z-\tilde{z}_R|$, откуда следует соотношение (5). Убедимся в справедливости оценки (6). В силу леммы 5 имеем $|\zeta-z|\leqslant|\zeta-\tilde{\zeta}_R|+|\tilde{\zeta}_R-z|\leqslant|\tilde{\zeta}_R-z|$.

Возможны два случая расположения точки ζ.

1) Пусть $|\zeta-z|\leqslant|\zeta-\tilde{\zeta}_R|$, тогда учитывая лемму 2 находим $|\tilde{\zeta}_R-\zeta|\asymp|\tilde{z}_R-z|\asymp|\tilde{\zeta}_R-z|$ и неравенство (6) имеет место с любым фиксированным $\alpha>0$.

2) Пусть $|\zeta-z|\geqslant|\zeta-\tilde{\zeta}_R|$. Тогда неравенство (6) перепишется в виде

$$\left|\frac{\zeta-\tilde{\zeta}_R}{\zeta-z}\right|\leqslant\left|\frac{z-\tilde{z}_R}{z-\zeta}\right|^{\alpha}. \tag{14}$$

Через $R_1>1$ и $R_2>1$ обозначим числа, удовлетворяющие равенству $|\zeta-\tilde{\zeta}_{R_1}|=|\zeta-z|=|z-\tilde{z}_{R_2}|$. Согласно леммам 2 и 7 $R_1-1\asymp R_2-1$.

Применим соотношение (13) к тройкам точек ζ, $\tilde{\zeta}_R$, $\tilde{\zeta}_{R_1}$ и z, $\tilde{z}_R$, $\tilde{z}_{R_2}$:

$$\left|\frac{\tilde{\zeta}_R-\zeta}{z-\zeta}\right|=\left|\frac{\tilde{\zeta}_R-\zeta}{\tilde{\zeta}_{R_1}-\zeta}\right|\leqslant\left(\frac{R-1}{R_1-1}\right)^{\alpha_1};$$

$$\left|\frac{\tilde{z}_R-z}{\zeta-z}\right|=\left|\frac{\tilde{z}_R-z}{\tilde{z}_{R_2}-z}\right|\geqslant\left(\frac{R-1}{R_2-1}\right)^{2},$$

откуда следует неравенство (14) с $\alpha=\alpha_1/2$.

1. Дзядык В. К. О применении обобщенных многочленов Фабера к приближению интегралов типа Коши и функций классов A^r в областях с гладкой и кусочно-гладкой границей.— Укр. мат. журн., 1972, **24**, № 1, с. 3—19.
2. Дзядык В. К. К теории приближения функций на замкнутых множествах комплексной плоскости.— Труды мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1975, **134**, с. 63—114.
3. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 512 с.
4. Белый В. И. Конформные отображения и приближение функций в областях с квазиконформной границей.— Мат. сб., 1977, **104** (144): 3, с. 163—193.
5. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969. 133 с.
6. Lehto O., Virtanen K. I. Quasiconformal Mappings in the Plane.— Berlin Heidelberg New York, 1973, 260 p.
7. Белый В. И., Миклюков В. М. Некоторые свойства конформных и квазиконформных отображений и прямые теоремы конструктивной теории функций.— Изв. АН СССР, серия матем., 1974, **38**, № 6, с. 1343—1361.

Институт прикладной математики
и механики АН УССР

Поступила в редакцию
4.04.1980 г.