УДК 519.21

И. И. Ежов

О некоторых вероятностных задачах, связанных с простыми числами

1. Определения и обозначения. 1. Пусть $P = \{p_1, p_2, \ldots\}$ $(p_k < p_{k+1}, k > 0)$ — последовательность всех простых чисел. По основной теореме арифметики [1] каждое натуральное n однозначно представимо в виде

$$n = \prod_{k=1}^{\infty} p_k^{\alpha_k}, \tag{1}$$

где 1) $\alpha_k \in \{0, 1, \ldots\}$, $k > 0$; 2) $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots < \infty$. Последовательность $\vec{\omega}(n) = \{\alpha_k, k > 0\}$ назовем базисом n в P, а $\psi(n) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ \sup(k{:}\alpha_k > 0, & n > 1 \end{cases}$ его рангом. Согласно 2) $\psi(n) < \infty$ для всех n. Если $\psi(n) = m > 0$, то (1) принимает вид

$$n = \prod_{k=1}^{m} p_k^{\alpha_k}, \quad \alpha_m > 0. \tag{2}$$

Через $d(k, n)$ обозначим наибольший общий делитель k и n. Если $k = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_r^{\beta_r}$ $(\psi(k) = r)$ и имеет место (2), то $d(k, n) = \prod\limits_{j \leqslant m \cap r} p_j^{\alpha_j \cap \beta_j}$, где $a \cap b = \min(a, b)$. Следовательно, $0 \leqslant \psi(d(k, n)) \leqslant \psi(k) \cap \psi(n)$. Далее, если $\vec{\omega}(k) = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ базис k в P, то $\vec{\omega}_m(k) = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$, $m > 0$ — его проекция на «оси» $p_1, \ldots, p_m$.

2. Будем говорить, что $\gamma(p)$ геометрически распределенная случайная величина с параметром $p > 1$, если $P\{\gamma(p) = k\} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)\frac{1}{p_k}$, $k = 0, 1, \ldots$. Если $\alpha \in \{0, 1, \ldots\}$, то по определению $\gamma_\alpha(p) = \gamma(p) \cap \alpha$ — «усечение» $\gamma(p)$ уровнем α.

Отметим ряд свойств геометрически распределенных случайных величин и их усечений.

1) $P\{\gamma(p) \geqslant k\} = \frac{1}{p^k}$, $k \geqslant 0$; 2) $P\{\gamma_\alpha(p) \geqslant k\} = \sigma\{k \leqslant \alpha\}\frac{1}{p^k}$, $k \geqslant 0$*; 3) $P\{\gamma_\alpha(p) = k\} = \left(1 - \frac{1}{p}\sigma\{k \neq \alpha\}\right)\frac{1}{p^k}$, $0 \leqslant k \leqslant \alpha$; 4) $M\theta^{\gamma(p)} = \frac{p-1}{p-\theta}$, $|\theta| < p$; 5) $M\theta^{\gamma_\alpha(p)} = \frac{p-1}{p-\theta} + \left(\frac{\theta}{p}\right)^\alpha \frac{1-\theta}{p-\theta}$, $\theta \neq p$; 6) если $\gamma(q_j)$, $j = 1, \ldots, r$ независимы в совокупности, то $\gamma(q_1) \cap \ldots \cap \gamma(q_r) \asymp \gamma\left(\prod\limits_{j=1}^{r} q_j\right)$, где $\asymp$ — символ совпадения распределений случайных вели-

* Если A — некоторое утверждение, то $\sigma(A)$ равно 1 или 0 в зависимости от того, истинно A или ложно.

чин; 7) если $\gamma_{\alpha_j}(q_j)$, $j=1,\ldots,r$ независимы в совокупности и $\alpha=\alpha_1\cap\ldots$ $\ldots\cap\alpha_r$, $q=\prod_1^r q_j$, то $\gamma_{\alpha_1}(q_1)\cap\ldots\cap\gamma_{\alpha_r}(q_r)\asymp\gamma_\alpha(q)$ 8) $P\{\lim\limits_{\alpha\to\infty}\gamma_\alpha(p)=\gamma(p)\}=1$; 9) $P\{\gamma_1(p)=1\}=1-P\{\gamma_1(p)=0\}=\dfrac{1}{p}$.

2. Формула Эйлера и ее обобщения. 1. Зафиксируем натуральное $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_m^{\alpha_m}$ ($p_j\in\mathcal{P}$, $j=1,\ldots,m$) и введем случайную величину ξ_n, равномерно распределенную на множестве $\{1,\ldots,n\}$

$$P\{\xi_n=k\}=\frac{1}{n},\quad k=1,\ldots,n. \tag{3}$$

Интерпретируем ее как результат «случайного» выбора из совокупности первых n натуральных чисел. Положим $\vec{\varepsilon}_n=\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m\}=\vec{\omega}_m(d(\xi_n,n))$.

Лемма 1. *Случайные величины $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m$ независимы в совокупности и $\varepsilon_j\asymp\gamma_{\alpha_j}(p_j)$, $j=1,\ldots,m$.*

Доказательство. Очевидно, что $P\{\varepsilon_j\leqslant\alpha_j,\ j=1,\ldots,m\}=1$. Пусть поэтому $k_j\in\{0,1,\ldots,\alpha_j\}$, $j=1,\ldots,m$. Событие $\{\varepsilon_j\geqslant k_j,\ j=1,\ldots,m\}$ равносильно тому, что ξ_n делится на $\prod_{j=1}^m p_j^{k_j}$. А так как среди первых n натуральных чисел ровно $n\left(\prod_{j=1}^m p_j^{k_j}\right)^{-1}$ чисел делится на $\prod_{j=1}^m p_j^{k_j}$, то из (3) следует, что $P\{\varepsilon_j\geqslant k_j,\ j=1,\ldots,m\}=\prod_{j=1}^m\dfrac{1}{p_j^{k_j}}$, а это и означает, что $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m$ независимы в совокупности и $\varepsilon_j\asymp\gamma_{\alpha_j}(p_j)$, $j=1,\ldots,m$. Лемма доказана.

Следствие. *Если $\varphi_n(k_1,\ldots,k_m)$ количество натуральных чисел, не превосходящих n и имеющих с ним наибольший общий делитель $\prod_{j=1}^m p_j^{k_j}$ ($k_j\leqslant\alpha_j$, $j=1,\ldots,m$), то*

$$\varphi_n(k_1,\ldots,k_m)=n\prod_{j=1}^m\left(1-\sigma\{k_j\neq\alpha_j\}\frac{1}{p_j}\right)\frac{1}{p_j^{k_j}}. \tag{4}$$

В частности, если $\varphi_n=\varphi_n(0,\ldots,0)$ количество натуральных чисел не превосходящих n и взаимно простых с ним, то

$$\varphi_n=n\prod_{j=1}^m\left(1-\sigma\{\alpha_j\neq0\}\frac{1}{p_j}\right). \tag{5}$$

Последнее равенство известно как формула Эйлера [2].

2. Найдем совместное распределение $\check{\varepsilon}_m=\varepsilon_1\cap\ldots\cap\varepsilon_m$ и $\hat{\varepsilon}_m=\varepsilon_1\cup\ldots$ $\ldots\cup\varepsilon_m$, где $a\cup b\cup\ldots\cup c=\max(a,b,\ldots,c)$. Согласно лемме 1, $P\{\check{\varepsilon}_m\geqslant k,$ $\hat{\varepsilon}_m<l\}=P\{k\leqslant\varepsilon_j<l,\ j=1,\ldots,m\}=\prod_{j=1}^m(P\{\varepsilon_j\geqslant k\}-P\{\varepsilon_j\geqslant l\})$, $0\leqslant k<l$. А так как (1, п. 2) $P\{\varepsilon_j\geqslant k\}=\sigma\{k\leqslant\alpha_j\}\,1/p_j^k$, то

$$P\{k\leqslant\check{\varepsilon}_m\leqslant\hat{\varepsilon}_m<l\}=\prod_{j=1}^m\left(\sigma\{k\leqslant\alpha_j\}\frac{1}{p_j^k}-\sigma\{l\leqslant\alpha_j\}\frac{1}{p_j^l}\right),\quad k<l. \tag{6}$$

При $l=1$ снова приходим к формуле Эйлера (5) $P\{\hat{\varepsilon}_m < 1\} = \prod_{j=1}^{m}\left(1-\sigma\{1\leqslant\alpha_j\}\frac{1}{p_j}\right)=\frac{1}{n}\varphi_n$.

Если в (6) $l>\alpha_1\cup\ldots\cup\alpha_m$, то приходим к распределению $\check{\varepsilon}_m$: $P\{\check{\varepsilon}_m\geqslant k\}=\prod_{j=1}^{m}\sigma\{k\leqslant\alpha_j\}\frac{1}{p_j^k}$, $k\geqslant 0$ или $P\{\check{\varepsilon}_m\geqslant k\}=\sigma\{k\leqslant\alpha_1\cap\ldots\cap\alpha_m\}\left(\prod_{j=1}^{m}p_j\right)^{-k}$. Из этого равенства следует, что $\check{\varepsilon}_m\asymp\gamma_{\alpha_1\cap\ldots\cap\alpha_m}(p_1\ldots p_m)$. Полагая, наконец, в (6) $k=0$ приходим к распределению $\hat{\varepsilon}_m$:

$$P\{\check{\varepsilon}_m<l\}=\prod_{j=1}^{m}\left(1-\sigma\{l\leqslant\alpha_j\}\frac{1}{p_j^l}\right),\quad l>0.$$

3. Вспомогательная цепь Маркова. 1. Пусть $0=\tau_0\leqslant\tau_1\leqslant\ldots\leqslant\tau_k\leqslant\ldots$ — целочисленная цепь Маркова со следующими переходными вероятностями на k-м шаге:

$$P\{\tau_k=j/\tau_{k-1}=j\}=1-P\{\tau_k=j+1/\tau_{k-1}=j\}=\frac{j}{k}\quad(k>0,\ 0\leqslant j<k).\tag{7}$$

Ясно, что если $p_k(j)=P\{\tau_k=j\}$, то

$$\alpha_k(p)=Mp^{-\tau_k}=\sum_{j=1}^{k}p_k(j)p^{-j}\quad(k>0,\ p\neq 0)\ \text{и}$$

$$p_{k+1}(1)=\frac{1}{k+1}p_k(1),\qquad p_{k+1}(k+1)=\frac{1}{k+1}p_k(k),\tag{8}$$

$$p_{k+1}(j+1)=\frac{j+1}{k+1}p_k(j+1)+\frac{k-j+1}{k+1}p_k(j),\quad 0<j<k.$$

Отсюда следует, что

$$(k+1)pa_{k+1}(p)=(k+1)a_k(p)-p(p-1)a_k'(p)\,(a_0(p)=1,\ k=0,1,\ldots).\tag{9}$$

Введем производящую функцию $a(\theta,p)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(p)\theta^k$, $p>1$, $|\theta|<1$. Согласно (9) $a(\theta,p)$ — решение задачи Коши

$$(p-\theta)\frac{\partial a(\theta,p)}{\partial\theta}+p(p-1)\frac{\partial a(\theta,p)}{\partial p}=a(\theta,p),\quad a(0,p)=1.\tag{10}$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений [3], соответствующих (10), есть

$$\frac{d\theta}{p-\theta}=\frac{dp}{p(p-1)}=\frac{da}{a}.$$

Соответствующая система первых интегралов имеет вид $c_1=(1-1/p)\theta-\ln p$, $c_2=(1-1/p)1/a$ и, стало быть, $a(\theta,p)=(1-1/p)\varphi(1/p\exp\{(1-1/p)\theta\})$, где φ подлежит определению. Так как $(\theta=0)$,

$$1=\left(1-\frac{1}{p}\right)\varphi\left(\frac{1}{p}\right),\qquad\varphi(x)=\frac{1}{1-x},$$

то

$$a(\theta, p) = \frac{p-1}{p - \exp\left\{\left(1-\frac{1}{p}\right)\theta\right\}}. \tag{11}$$

Из этого равенства следует, что

$$p - 1 = \left(p - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^j \theta^j\right) \sum_{k=0}^{\infty} a_k(p)\, \theta^k,$$

откуда

$$pa_k(p) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\left(1-\frac{1}{p}\right)^j a_{k-j}(p), \quad k > 0.$$

Положим $k!\, a_k(p) = b_k(p)$, $k \geqslant 0$. Тогда

$$pb_k(p) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \left(1 - \frac{1}{p}\right)^j b_{k-j}(p), \quad k > 0. \tag{12}$$

Эти рекуррентные равенства, связывающие $b_k(p)$, можно записать более компактно. В самом деле, если под $(z+\vec{b})^k$ $(\vec{b} = \{b_0, b_1, \ldots\})$ понимать сумму $\sum_{j=0}^{k} C_k^j z^j b_{k-j}$, то из (12) следует, что

$$pb_k(p) = \left(1 - \frac{1}{p} + \vec{b}(p)\right)^k, \quad k > 0, \tag{13}$$

где $\vec{b}(p) = \{1 = b_0(p), b_1(p), \ldots\}$. Итак, имеет место теорема.

Теорема 1. *Если* $0 = \tau_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \ldots$ — *неоднородная целочисленная цепь Маркова с переходными вероятностями на* k*-м шаге* (7) *и* $b_k(p) = \frac{1}{k!} Mp^{-\tau_k}$, $k \geqslant 0$, *то производящие функции* $b_k(p)$, $k > 0$ *определяются рекуррентными равенствами* (13).

2. Установим связь между $b_k(p)$ и суммой ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^k p^{-j}; \quad k = 0, 1, \ldots, p > 1 \quad (0^0 = 1).$$

Согласно (11)

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k(p) \frac{\theta^k}{k!} = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p^j} \exp\left\{\left(1 - \frac{1}{p}\right) j\theta\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{k+1} \times$$

$$\times \frac{\theta^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^k}{p^j},$$

откуда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^k}{p^j} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-k-1} b_k(p), \quad k > 0. \tag{14}$$

4. Некоторые тождества, связанные с многочленами. 1. Пусть $k!\, p_k(j) = \beta_k(j)$ $(k > 0,\ 0 < j \leqslant k)$, так что

$$\sum_{j=1}^{k} \beta_k(j)\, p^{-j} = b_k(p).$$

Согласно тождеству (14)

$$\sum_{j=1}^{k} \beta_k(j)\, p^{-j} = \sum_{r=0}^{k+1} C_{k+1}^{r} (-p)^{-r} \sum_{l=0}^{\infty} l^k p^{-l}, \tag{15}$$

откуда

$$0 < \beta_k(j) = \sum_{l=0}^{j} (-1)^l C_{k+1}^{l} (j-l)^k\,^*, \quad 0 < j \leqslant k,$$

$$\sum_{l=0}^{k+1} (-1)^l C_{k+1}^{l} (j-l)^k = 0, \quad j > k. \tag{16}$$

Так как $a_k(1) = 1$, то приходим к равенству

$$\frac{1}{k!} \sum_{0 \leqslant l < j \leqslant k} (-1)^l C_{k+1}^{l} (j-l)^k = 1. \tag{17}$$

Покажем, что многочлены $b_k(p)$ «симметричны», т. е. что

$$\beta_k(j) = \beta_k(k-j+1), \quad 1 \leqslant j \leqslant k. \tag{18}$$

Согласно (8)

$$\beta_{k+1}(1) = \beta_k(1), \qquad \beta_{k+1}(k+1) = \beta_k(k),$$

$$\beta_{k+1}(j+1) = (j+1)\beta_k(j+1) + (k-j+1)\beta_k(j), \quad 0 < j < k. \tag{19}$$

Для $k=1$ (18) очевидно. Предполагая, что (18) имеет место для фиксированного $k > 0$ и используя (19), имеем $\beta_{k+1}(1) = \beta_{k+1}(k+1)$, $\beta_{k+1}(j+1) = (j+1)\beta_k(k-j) + (k-j+1)\beta_k(k-j+1) = \beta_{k+1}(k-j+1)$ $(0<j<k)$. Этим равенства (18) обоснованы по индукции. Применяя их к (16), приходим к равенствам

$$\sum_{l=0}^{j} (-1)^l C_{k+1}^{l} (j-l)^k = \sum_{l=0}^{k-j+1} (-1)^l C_{k+1}^{l} (k-j+1-l)^k, \quad 1 \leqslant j \leqslant k. \tag{20}$$

2. Тождество (14) может служить источником для вычисления сумм некоторых рядов. В самом деле, если $-\varepsilon \in \{p : -1 < p^{-1} < 0,\ b_k(p) = 0\} = H_k$, то

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j+1)^k}{\varepsilon^{2j+1}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j)^k}{\varepsilon^{2j}}.$$

А так как $(|p| > 1)$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j)^k}{p^{2j}} = 2^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^k}{(p^2)^j} = 2^k \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-k-1} b_k(p^2),$$

то

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j+1)^k}{\varepsilon^{2j+1}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j)^k}{\varepsilon^{2j}} = 2^k \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right) b_k(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \in H_k. \tag{21}$$

Непосредственный подсчет показывает, что **

$$H_1 = H_2 = \varnothing, \quad H_3 = \{-2 - \sqrt{3}\}, \quad H_4 = \{-5 - \sqrt{24}\},$$

$$H_5 = \left\{\frac{1}{2}\left(-13 \mp \sqrt{105} - \sqrt{270 \pm 26\sqrt{105}}\right)\right\} \text{ и т. д.}$$

---

* Неравенства $\beta_k(j) > 0$, $0 < j \geqslant k$ тривиально следуют из соотношений (7).

** Вычисление корней облегчается тем обстоятельством, что соответствующие многочлены симметричны.

Кроме того, нетрудно проверить, что

$$2^3\left(1-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)^{-4} b_3(\varepsilon^2)\,|_{\varepsilon=2+\sqrt{3}}=1,$$

$$2^4\left(1-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)^{-5} b_4(\varepsilon^2)\,|_{\varepsilon=5+\sqrt{24}}=\frac{5\sqrt{6}}{64},$$

а тогда (см. (21))

$$\sum_{j=1}^{\infty}(2j-1)^3(2-\sqrt{3})^{2j-1}=1, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} j^3(7-4\sqrt{3})^j=\frac{1}{8},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}(2j-1)^4(5-\sqrt{24})^{2j-1}=\frac{5\sqrt{6}}{64}, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} j^4(49-20\sqrt{6})^j=\frac{5\sqrt{6}}{1024}.$$

5. Моменты геометрически распределенных случайных величин и их усечений. Так как

$$M\gamma^k(p)=\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{0}^{\infty}\frac{j^k}{p^j}, \text{ то (см. 4)}$$

$$M\gamma^k(p)=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-k} b_k(p), \quad k\geqslant 0.$$

Перейдем к $\gamma_\alpha(p)$. Положим

$$\sum_{j=0}^{\alpha-1}\frac{j^k}{p^j}=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-k-1} b_k^{(\alpha)}(p), \quad k!\,a_k^{(\alpha)}(p)=b_k^{(\alpha)}(p).$$

После дифференцирования по p имеем

$$p(k+1)\,a_{k+1}^{(\alpha)}(p)=(k+1)\,a_k^{(\alpha)}(p)-p(p-1)\,\frac{da_k^{(\alpha)}(p)}{dp}, \quad k\geqslant 0$$

$$a_0^{(\alpha)}(p)=1-\frac{1}{p^\alpha}.$$

Введем $a_\alpha(\theta,p)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k^{(\alpha)}(p)\,\theta^k$. Тогда $(p-\theta)\,\dfrac{\partial a_\alpha(\theta,p)}{\partial\theta}+p(p-1)\times$ $\times\dfrac{\partial a_\alpha(\theta,p)}{\partial p}=a_\alpha(\theta,p)$, $a_\alpha(0,p)=1-\dfrac{1}{p^\alpha}$. Решая это уравнение (см. 3), имеем $a_\alpha(\theta,p)=\left(1-\dfrac{1}{p}\right)\varphi_\alpha\left(\dfrac{1}{p}\exp\left\{\left(1-\dfrac{1}{p}\right)\theta\right\}\right)$, $\varphi_\alpha(x)=(1-x)^{-1}\times$ $\times(1-x^\alpha)$ и, стало быть,

$$a_\alpha(\theta,p)=a(\theta,p)\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\exp\left\{\alpha\theta\left(1-\frac{1}{p}\right)\right\}\right). \tag{22}$$

Раскладывая обе части (22) в ряд по степеням θ, получим

$$b_k^{(\alpha)}(p)=b_k(p)-\frac{1}{p^\alpha}\left(\alpha\left(1-\frac{1}{p}\right)+\vec{b}(p)\right)^k, \quad k\geqslant 0. \tag{23}$$

Рассуждая, как и в 3, можно получить рекуррентное соотношение, связывающее функции $b_k^{(\alpha)}(p)$: если $\vec{b}_\alpha(p)=\{b_k^{(\alpha)}(p),\ k\geqslant 0\}$, то $b_0^{(\alpha)}(p)=1-$

$- \frac{1}{p^\alpha} pb_k^{(\alpha)}(p) - \left(1 - \frac{1}{p} + \vec{b}_\alpha(p)\right)^k = \frac{1-p}{p^\alpha} \alpha^k \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k$. Сопоставляя определение $b_k^{(\alpha)}(p)$ с (23), приходим к следующему выражению для k-го момента $\gamma_\alpha(p)$:

$$M\gamma_\alpha(p) = \frac{1}{p^\alpha}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^k \left\{p^\alpha b_k(p) - \left(\alpha\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \vec{b}(p)\right)^k + \alpha^k\left(1 - \frac{1}{p}\right)^k\right\}. \tag{24}$$

6. Распределение $c(d(\xi_n, n))$ *. 1. Напомним (см. **2**), что если $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_m^{\alpha_m}$, то $d(\xi_n, n) = p_1^{\varepsilon_1} \ldots p_m^{\varepsilon_m}$, где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ независимы в совокупности и $\varepsilon_j \asymp \gamma_{\alpha_j}(p_j)$, $j = 1, \ldots, m$.

Так как $c(d(\xi_n, n)) = \prod_1^m (1 + \varepsilon_j)$, то из сказанного выше следует, что

$$Mc^k(d(\xi_n, n)) = \prod_{j=1}^m M(1 + \gamma_{\alpha_j}(p_j))^k. \tag{25}$$

Поскольку $M(1 + \gamma_\alpha(p))^k = pM\gamma_\alpha^k(p) + \frac{(\alpha+1)^k - \alpha^k}{p^\alpha}$, то (см. (24))

$$M(1 + \gamma_\alpha(p))^k = \frac{(\alpha+1)^k - \alpha_k}{p^\alpha} + p^{1-\alpha}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-k}\left\{p^\alpha b_k(p) - \right.$$

$$\left. - \left(\alpha\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \vec{b}(p)\right)^k + \alpha^k\left(1 - \frac{1}{p}\right)^k\right\}.$$

Следовательно $Mc^k(d(\xi_n, n)) = \varkappa_k(n)$, $k = 0, 1, \ldots,$ где

$$\varkappa_k(n) = \prod_{j=1}^m \left[\frac{(\alpha_j + 1)^k - \alpha_j^k}{p_j^{\alpha_j}} + p_j^{1-\alpha_j}\left(1 - \frac{1}{p_j}\right)^{-k}\left\{p_j^{\alpha_j} b_k(p_j) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\alpha_j\left(1 - \frac{1}{p_j}\right) + \vec{b}(p_j)\right)^k + \alpha_j^k\left(1 - \frac{1}{p_j}\right)^k\right\}\right]. \tag{26}$$

2. Положим $P\{c(d(\xi_n, n)) = j\} = c_n(j)$, $0 < j \leqslant \prod_{r=1}^m (1 + \alpha_r) = c(n)$.

Имеем $\sum_{j=1}^{c(n)} j^k c_n(j) = \varkappa_k(n)$, $0 \leqslant k < c(n)$ или $w_n \vec{c}_n = \vec{\varkappa}(n)$, где $\vec{c}_n = (c_n(j),$ $0 < j \leqslant c(n))$, $\vec{\varkappa}(n) = (\varkappa_k(n),\ 0 \leqslant k < c(n))$, $w_n = (j^k;\ 0 < j \leqslant c(n),\ 0 \leqslant k <$ $< c(n))$. Нетрудно подсчитать, что $\det w_n = \prod_{0 < k < c(n)} k!$, так что матрица w_n обратима и

$$\vec{c}_n = w_n^{-1} \vec{\varkappa}(n). \tag{27}$$

Положим $\vec{e}_j(n) = (\delta_{kj},\ 0 < k \leqslant c(n))$ **, $0 < j \leqslant c(n)$. Согласно (27), $c_n(j) = \vec{e}_j(n) w_n^{-1} \vec{\varkappa}(n)$. Этим доказана теорема 2.

---

* $c(k)$ — число всех делителей k.

** δ_{kj} — символ Кронекера.

Т е о р е м а 2. *Если* $\nu(A)$ *число элементов множества* A *и* $n = p_1^{\alpha_1} \ldots$ $\ldots p_m^{\alpha_m}$, *то* $\nu(k\colon 1 \leqslant k \leqslant n), \quad c(d(k, n)) = j) = n\vec{e}_j(n)\, w_n^{-1} \vec{\varkappa}(n)$, *где* $c(n) = \prod_{j=1}^{m}(1+\alpha_j)$, $w_n = (j^k;\ 0 \leqslant k < c(n),\ \ 0 < j \leqslant c(n))$, $\vec{e}_j(n) = (\delta_{kj},\ 0 < k \leqslant c(n))$, $\vec{\varkappa}(n) = (\varkappa_k(n),\ 0 \leqslant k < c(n))$ *и* $\varkappa_k(n)$ *задаются равенствами* (26).

1. К а л у ж н и н Л. А. Основная теорема арифметики, М., Наука, 1969.
2. П р а х а р К. Распределение простых чисел. М., Мир, 1967.
3. С т е п а н о в В. В. Курс дифференциальных уравнений, М., Гостехиздат, 1953.
4. Р и о р д а н Д. Введение в комбинаторный анализ, М., ИЛ, 1963.
5. Е ж о в И. И. Числа Бернулли и некоторые их применения, сб. «Асимптотические и перечислительные задачи комбинаторного анализа», Красноярск, 1976.
6. Е ж о в И. И. О вероятностной задаче, приводящей к суммированию ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k^n x^k$ ДАН УССР, 9, 1968.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
22.06.1980 г.