УДК 517.5

В. К. Дзядык, С. Ю. Дзядык, А. С. Прыпик

Об асимптотике констант Лебега при тригонометрическом интерполировании

1°. Рассмотрим при каждом $n = 1, 2, \ldots$ в качестве узлов интерполяционных полиномов Лагранжа при тригонометрическом интерполировании равноотстоящие точки

$$x_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, \quad k = \overline{-n, n}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Фундаментальные полиномы Лагранжа имеют вид (см., например, [4, с. 21])

$$l_k(x) = \frac{1}{2n+1} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x - x_k)}{\sin \frac{x - x_k}{2}}.$$

При каждом фиксированном n функцией Лебега для интерполяционных узлов (1) называется функция $\Lambda(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} |l_k(x)|$, а константой Лебега — величина $\tilde{\lambda}_n = \max\limits_{-\pi \leqslant x \leqslant \pi} \Lambda(x)$. Как известно (см. [6, с. 106]), имеет место равенство:

$$\tilde{\lambda}_n = \frac{1}{2n+1} \cdot \left\{ 1 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sin \frac{(2k+1)\cdot\pi}{(2n+1)\cdot 2} \right)^{-1} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Это равенство дает возможность при каждом фиксированном n найти значение величины $\tilde{\lambda}_n$ со сколь угодно большой точностью. Однако, исходя из него трудно усмотреть поведение величины $\tilde{\lambda}_n$ (как функции от n) при $n \to \infty$.

В [4, с. 40] установлено, что

$$\tilde{\lambda}_n = \frac{2}{\pi} \cdot \ln n + O(1). \tag{3}$$

В работе [7] установлено более сильное равенство

$$\tilde{\lambda}_n = \frac{2}{\pi} \cdot \ln n + \beta_n; \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3'}$$

где величина β_n убывает от $5/3$ до $\frac{2}{\pi}\left(\ln \frac{16}{\pi} + C\right)$, C — постоянная Эйлера.

Равенство, подобное (3′), установлено в [8] также для констант Лебега λ_n в случае интерполирования на $[-1, 1]$ алгебраическими многочленами по узлам Чебышева $x_k = -\cos \frac{2k+1}{2n}\pi$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Недавно в статье [5] для констант λ_n получено разложение в асимптотический ряд, и найдены хорошие оценки для любых остатков этого ряда.

В настоящей статье путем использования схемы из [5] получены аналогичные результаты для констант Лебега $\tilde{\lambda}_n$, т. е. доказывается следующая теорема.

Теорема. *Константа Лебега $\tilde{\lambda}_n$ для интерполяционного многочлена Лагранжа, построенного по узлам* (1) *в периодическом случае представима в виде асимптотического ряда*

$$\tilde{\lambda}_n = \frac{2}{\pi}\ln n + \frac{2}{\pi}\left(C + \ln\frac{16}{\pi}\right) + \frac{2}{\pi(2n+1)} + \sum_{\nu=1}^{l}\frac{a_\nu}{(2n+1)^{2\nu}} + \\ + \sum_{\nu=1}^{l}\frac{b_\nu}{(2n)^{2\nu}} + R_{n,l}, \quad l = 0, 1, 2, \ldots; \; n = 2, 3, \ldots, \tag{4}$$

в котором коэффициенты a_ν и b_ν вычисляются по формулам

$$a_\nu = \frac{4}{\pi}\left(2 - \frac{1}{\nu}\right)\cdot\frac{2^{2\nu-1}-1}{4^{2\nu}}\cdot\zeta(2\nu) + \frac{4}{\pi}(-1)^{\nu-1}\cdot\frac{\zeta(2\nu)}{\pi^{2\nu}}\times \\ \times\sum_{k=\nu+1}^{\infty}\frac{2^{2k-1}-1}{4^{2k-1}}\cdot\zeta(2k)\frac{(2k-1)!}{(2k-2\nu)!} + \frac{4}{\pi}\cdot\frac{2^{2\nu-1}-1}{4^{2\nu-1}}\cdot\zeta(2\nu)\times \\ \times\sum_{j=1}^{\nu-1}\frac{(-1)^j\zeta(2j)}{\pi^{2j}}\cdot\frac{(2\nu-1)!}{(2\nu-2j)!}, \tag{5}$$

$$b_\nu = (-1)^\nu\cdot\frac{8}{\pi}\cdot\frac{(2\nu-1)!}{(2\pi)^{2\nu}}\cdot(1 - 2^{2\nu-1})\cdot\zeta(2\nu), \tag{5'}$$

при этом для остатка $R_{n,l}$ справедливы оценки:

$$|R_{n,0}| \leqslant \frac{0{,}877}{(2n)^2}; \qquad |R_{n,1}| \leqslant \frac{0{,}696}{(2n)^4}; \qquad |R_{n,2}| \leqslant \frac{0{,}915}{(2n)^6};$$

$$|R_{n,l}| \leqslant \frac{0{,}685}{\pi^{2l}}\cdot\frac{(2l+1)!}{(2n)^{2l+2}} \;\; \text{при} \;\; l = 3, 4, \ldots. \tag{6}$$

Важность этой теоремы объясняется, во-первых, простотой построения интерполяционных полиномов по узлам (1). Во-вторых, система равноотстоящих узлов является оптимальной в смысле минимальной нормы по сравнению со всякой другой системой, состоящей из такого же количества узлов на периоде [9].

Ясно, что равенство (4) точнее равенства (3′).

2°. Для доказательства теоремы нам потребуются следующие вспомогательные факты.

1. Если при каких-нибудь натуральных n и l функция $\varphi(x) \in C_{[0,n]}^{(2l+2)}$ и при этом функции $\varphi^{(2j)}(x)$ и $\varphi^{(2j+2)}(x)$ имеют $\forall x \in [0, n]$ и $j = 1, 2, \ldots, l$ одинаковые знаки, то справедлива следующая формула суммирования Эйлера (см. [3, с. 281—282])

$$\sum_{k=m}^{n-1}\varphi(k) = \int_m^n \varphi(x)\,dx - \frac{1}{2}[\varphi(n) - \varphi(m)] + \sum_{\nu=1}^{l}\frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!}[\varphi^{(2\nu-1)}(n) - \\ - \varphi^{(2\nu-1)}(m)] + R_{n,l}, \tag{7}$$

где $B_{2\nu}$ — числа Бернулли, которые при натуральном ν могут быть определены по формуле (см. [3, с. 262])

$$B_{2\nu} = (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{2\,(2\nu)!}{(2\pi)^{2\nu}} \cdot \zeta(2\nu), \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

а остаток $R_{n,l}$ определяется по формуле

$$R_{n,l} = \theta \cdot \frac{B_{2l+2}}{(2l+2)!} \cdot [\varphi^{(2l+1)}(n) - \varphi^{(2l+1)}(m)], \quad 0 < \theta < 1, \tag{9}$$

$\zeta(s) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ — дзэта-функция Римана.

2. $\forall\, n = 2, 3, \ldots$ справедливы соотношения (см. [1, с. 793])

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^{-1} = \mathrm{C} + \ln n - \frac{1}{2n} + 2 \cdot \sum_{\nu=1}^{l} (-1)^{\nu}\, \frac{(2\nu-1)!}{(2\pi)^{2\nu}} \cdot \zeta(2\nu) \cdot n^{-2\nu} +$$

$$+ (-1)^{l+1} \theta' \, \frac{2\,(2l+1)!\, \zeta(2l+2)}{(2\pi)^{2l+2}} \cdot n^{-2l-2}, \quad \theta < \theta' < 1, \tag{10}$$

где $\mathrm{C} = 0{,}577\ldots$ — постоянная Эйлера.

3. $\forall\, |x| < \frac{\pi}{2}$ имеет место равенство (см. [1, с. 497])

$$\ln \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{(2^{2k-1}-1) \cdot 2^{2k} \cdot B_{2k}}{k \cdot (2k)!} \cdot x^{2k}, \tag{11}$$

а $\forall\, |x| < \pi$ — равенство (см. [2, с. 347])

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\, \frac{(2^{2k-1}-1)\, B_{2k}}{(2k)!}\, x^{2k-1} = \frac{1}{x} +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^{2k-1}-1)}{(2k)!} \,|B_{2k}| \cdot x^{2k-1}. \tag{12}$$

3°. Для доказательства теоремы, пользуясь формулой (2), представим константу Лебега $\tilde{\lambda}_n$ в виде:

$$\tilde{\lambda}_n = \frac{1}{2n+1} \cdot \left\{ 1 + 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sin \frac{(2k+1) \cdot \pi}{(2n+1) \cdot 2} \right)^{-1} \right\} = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+1} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\sin \frac{(2k+1)\,\pi}{(2n+1) \cdot 2}} - \frac{2\,(2n+1)}{\pi\,(2k+1)} \right) + \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1},$$

или, если положить

$$\varphi(x) = \operatorname{cosec} \frac{(2x+1)\,\pi}{(2n+1) \cdot 2} - \frac{2\,(2n+1)}{\pi\,(2x+1)}, \tag{13}$$

в виде

$$\tilde{\lambda}_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(k) + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1}. \tag{14}$$

Поскольку все производные функции $\varphi(x)$ в силу (12) положительны, то согласно (7):

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(k) = \int_0^n \varphi(x)\,dx + \frac{1}{2}[-\varphi(n) + \varphi(0)] + \sum_{\nu=1}^{l} \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!}[\varphi^{(2\nu-1)}(n) -$$

$$-\varphi^{(2\nu-1)}(0)] + \theta\frac{B_{2l+2}}{(2l+2)!}[\varphi^{(2l+1)}(n) - \varphi^{(2l+1)}(0)] =$$

$$= \frac{2n+1}{2}(A_1 + A_2 + A_3 + A_4). \tag{15}$$

После преобразований A_j получим

$$A_1 = \frac{2}{2n+1}\int_0^n \left[\operatorname{cosec}\frac{(2x+1)\pi}{(2n+1)\cdot 2} - \frac{2(2n+1)}{\pi(2x+1)}\right]dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{cosec} t - \frac{1}{t}\right)dt = -\frac{2}{\pi}\left(\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{4(2n+1)} + \ln(2n+1)\right),$$

и, значит, в силу (11) и (8)

$$A_1 = -\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{(2^{k-1}-1)\cdot 2^{2k}\cdot B_{2k}}{k\cdot(2k)!}\cdot\frac{\pi^{2k}}{4^{2k}(2n+1)^{2n}}\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{\pi}{4} + 2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2^{2k-1}-1)\cdot\zeta(2k)}{k\cdot 4^{2k}}\cdot\frac{1}{(2n+1)^{2k}}\right).$$

Учитывая (12), имеем

$$A_2 = -\frac{1}{2n+1}\cdot\left[1 - \frac{2}{\pi} - \operatorname{cosec}\frac{\pi}{2(2n+1)} + \frac{2(2n+1)}{\pi}\right] = \frac{1}{2n+1}\times$$

$$\times\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} + \frac{4}{\pi}(2n+1)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2^{2k-1}-1)\cdot\zeta(2k)}{4^{2k}}\cdot\frac{1}{(2n+1)^{2k}}\right)$$

и, следовательно,

$$A_1 + A_2 = \frac{2}{2n+1}\cdot\left(-\frac{2n+1}{\pi}\ln\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(2 - \frac{1}{k}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{2^{2k-1}-1}{4^{2k}}\zeta(2k)\cdot\frac{1}{(2n+1)^{2k}}\right. \tag{15'}$$

Пользуясь (13), (12) и (8), представим $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(x) = \frac{2(2n+1)}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2^{2k-1}-1)}{4^{2k-1}}\cdot\zeta(2k)\cdot\frac{(2x+1)^{2k-1}}{(2n+1)^{2k}}.$$

$$A_3 = \frac{2}{2n+1} \cdot \sum_{\nu=1}^{l} \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} \cdot [\varphi^{(2\nu-1)}(n) - \varphi^{(2\nu-1)}(0)] =$$

$$= \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{\nu=1}^{l} \frac{(-1)^{\nu-1} \cdot \zeta(2\nu)}{\pi^{2\nu}(2n+1)^{2\nu}} \sum_{k=\nu}^{\infty} \frac{2^{2k-1}-1}{4^{2k-1}} \cdot \zeta(2k) \cdot \frac{(2k-1)!}{(2k-2\nu)!} \times$$
$$\times \left[1 - \frac{1}{(2n+1)^{2k-2\nu}}\right] \tag{15''}$$

$$A_4 = \theta \cdot \frac{B_{2l+2}}{(2l+2)!} \cdot [\varphi^{(2l+1)}(n) - \varphi^{(2l+1)}(0)] \cdot \frac{2}{2n+1} =$$

$$= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\theta(-1)^l \cdot \zeta(2l+2)}{\pi^{2l+2}} \cdot \frac{1}{(2n+1)^{2l+2}} \cdot \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{2^{2k-1}-1}{4^{2k-1}} \cdot \zeta(2k) \times$$
$$\times \frac{(2k-1)!}{(2(k-l-1))!} \cdot \left[1 - \frac{1}{(2n+1)^{2(k-l-1)}}\right]. \tag{15'''}$$

Выделим из (15′) — (15″) частную сумму и остаток:

$$A_1 + A_2 = -\frac{2}{\pi} \ln \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi(2n+1)} + \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{l} \left(2 - \frac{1}{k}\right) \cdot$$
$$\times \frac{2^{2k-1}-1}{4^{2k}} \zeta(2k) \cdot \frac{1}{(2n+1)^{2k}} + R_{n,l}^{(1)}, \tag{16}$$

где $R_{n,l}^{(1)} = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=l+1}^{\infty} \left(2 - \frac{1}{k}\right) \frac{2^{2k-1}-1}{4^{2k}} \cdot \zeta(2k) \cdot \frac{1}{(2n+1)^{2k}}$, так, что

$$|R_{n,l}^{(1)}| \leqslant 2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{6} \cdot \sum_{k=l+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2(2n+1)}\right)^{2k} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2(2n+1)}\right)^{2l+2}}{1 - \left(\frac{1}{2(2n+1)}\right)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{6\pi}{35} \cdot \frac{1}{2^{2l}} \cdot \frac{1}{(2n+1)^{2l+2}} < \frac{0{,}539}{2^{2l}(2n+1)^{2l+2}}. \tag{17}$$

$$A_3 = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{\nu=1}^{l} (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\zeta(2\nu)}{\pi^{2\nu}(2n+1)^{2\nu}} \cdot \left\{ \sum_{k=\nu}^{l} \frac{2^{2k-1}-1}{4^{2k-1}} \cdot \zeta(2k) \times \right.$$
$$\times \frac{(2k-1)!}{(2k-2\nu)!} \left[1 - \frac{1}{(2n+1)^{2(k-\nu)}}\right] + \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{2^{2k-1}-1}{4^{2k-1}} \cdot \zeta(2k) \times$$
$$\left. \times \frac{(2k-1)!}{(2k-2\nu)!} \right\} + R_{n,l}^{(2)}, \tag{18}$$

где

$$R_{n,l}^{(2)} = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{\nu=1}^{l} (-1)^{\nu} \cdot \frac{\zeta(2\nu)}{\pi^{2\nu}} \cdot \frac{1}{(2n+1)^{2\nu}} \cdot \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{2^{2k-1}-1}{4^{2k-1}} \cdot \zeta(2k) \times$$
$$\times \frac{(2k-1)!}{(2k-2\nu)!} \cdot \frac{1}{(2n+1)^{2(k-\nu)}}.$$

Перепишем частную сумму слагаемого A_3 в виде

$$\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{\nu=1}^{l}(-1)^{\nu-1}\cdot\frac{\zeta(2\nu)}{\pi^{2\nu}(2n+1)^{2\nu}}\cdot\sum_{k=\nu}^{\infty}\frac{2^{2k-1}-1}{4^{2k-1}}\cdot\zeta(2k)\cdot\frac{(2k-1)!}{(2k-2\nu)!}+$$

$$+\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{\nu=1}^{l}(-1)^{\nu}\cdot\frac{\zeta(2\nu)}{\pi^{2\nu}}\cdot\sum_{k=\nu}^{l}\frac{2^{2k-1}-1}{4^{2k-1}}\cdot\zeta(2k)\cdot\frac{(2k-1)!}{(2k-2\nu)!}\cdot\frac{1}{(2n+1)^{2k}}.$$

Отсюда видно, что в этой сумме коэффициент члена, содержащего $\frac{1}{(2n+1)^{2\nu}}$, равен

$$\frac{4}{\pi}(-1)^{\nu-1}\cdot\frac{\zeta(2\nu)}{\pi^{2\nu}}\cdot\sum_{k=\nu}^{\infty}\frac{2^{2k-1}-1}{4^{2k-1}}\cdot\zeta(2k)\cdot\frac{(2k-1)!}{(2k-2\nu)!}+$$

$$+\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{j=1}^{\nu}\frac{(-1)^{j}\cdot\zeta(2j)}{\pi^{2j}}\cdot\frac{2^{2\nu-1}-1}{4^{2\nu-1}}\cdot\zeta(2\nu)\cdot\frac{(2\nu-1)!}{(2\nu-2j)!}=$$

$$=\frac{4}{\pi}\cdot(-1)^{\nu-1}\cdot\frac{\zeta(2\nu)}{\pi^{2\nu}}\cdot\sum_{k=\nu+1}^{\infty}\frac{2^{2k-1}-1}{4^{2k-1}}\cdot\zeta(2k)\cdot\frac{(2k-1)!}{(2k-2\nu)!}+$$

$$+\frac{4}{\pi}\cdot\frac{2^{2\nu-1}-1}{4^{2\nu-1}}\cdot\zeta(2\nu)\cdot\sum_{j=1}^{\nu-1}\frac{(-1)^{j}\cdot\zeta(2j)}{\pi^{2j}}\cdot\frac{(2\nu-1)!}{(2\nu-2j)!}. \tag{19}$$

Оценим теперь остаток $R_{n,l}^{(2)}$ в (18):

$$R_{n,l}^{(2)}=\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{2^{2k-1}-1}{4^{2k-1}}\cdot\zeta(2k)\cdot\left[\sum_{\nu=1}^{l}(-1)^{\nu}\cdot\frac{\zeta(2\nu)}{\pi^{2\nu}}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{(2k-1)!}{(2k-2\nu)!}\right]\cdot\frac{1}{(2n+1)^{2k}}.$$

Установим, что для суммы в квадратных скобках справедлива оценка

$$\left|\sum_{\nu=1}^{l}(-1)^{\nu}\cdot\frac{\zeta(2\nu)}{\pi^{2\nu}}\cdot\frac{(2k-1)!}{(2k-2\nu)!}\right|\leqslant\frac{(2k-1)!}{(2k-2l)!}\cdot\frac{\zeta(2l)}{\pi^{2l}},\quad k=l+1,\ldots. \tag{20}$$

Для этой цели достаточно убедиться, что $\forall k=l+1,\ l+2,\ldots$ слагаемые $\frac{\zeta(2\nu)}{\pi^{2\nu}}\cdot\frac{(2k-1)!}{(2k-2\nu)!}$ монотонно возрастают вместе с $\nu=1,2,\ldots,l$, т. е., что справедливо неравенство:

$$\frac{\pi^{2}\cdot\zeta(2\nu)}{\zeta(2\nu+2)}\leqslant(2k-2\nu)\cdot(2k-2\nu-1),\quad \nu=1,2,\ldots,l-1;$$
$$k=l+1,\ l+2,\ldots.$$

При $l\geqslant 3$ и $\nu=1$ сразу получаем

$$\frac{\pi^{2}\cdot\zeta(2)}{\zeta(4)}=\frac{\pi^{2}\cdot\pi^{2}\cdot 90}{6\cdot\pi^{4}}=15\leqslant(2k-2)\cdot(2k-3);$$

а при $l \geqslant 3$ и $\nu = 2, 3, \ldots, l-1$:

$$\frac{\pi^2 \cdot \zeta(2\nu)}{\zeta(2\nu+2)} \leqslant \pi^2 \cdot \zeta(4) = \frac{\pi^2 \cdot \pi^4}{90} < \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9} \cdot < (2k-2\nu) \times$$

$$+ (2k - 2\nu - 1).$$

При $l = 1, 2$ неравенство (20) проверяется непосредственно. Поэтому, учитывая (20), получаем

$$|R_{n,l}^{(2)}| \leqslant \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{2^{2k-1}-1}{4^{2k-1}} \cdot \zeta(2k) \cdot \frac{\zeta(2l)}{\pi^{2l}} \cdot \frac{(2k-1)!}{(2k-2l)!} \cdot \frac{1}{(2n+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\pi^{2l}} \cdot \frac{1}{(2n+1)^{2l+2}} \cdot \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{1}{2}\Big)^{2k-1} \cdot \frac{(2k-1)!}{(2k-2l)!} =$$

$$= \frac{\pi^3}{9} \cdot \frac{1}{\pi^{2l}} \cdot \frac{1}{(2n+1)^{2l+2}} \cdot \sum_{k=l+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \frac{(2k-1)!}{(2k-2l)!}.$$

Для вычисления суммы $\sum\limits_{k=l+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \cdot \frac{(2k-1)!}{(2k-2l)!}$ введем на $(-1,1)$ следующую вспомогательную функцию:

$$\alpha(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=l+1}^{\infty} x^{2k-1} \frac{(2k-1)!}{(2k-2l)!} = \frac{1}{2} \cdot x^{2l-1} \left(\frac{x^{2l}}{1-x} - \frac{x^{2l}}{1+x}\right)^{(2l-1)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x^{2l-1} (2l-1)! \left(\frac{x^{2l}}{(1-x)^{2l}} + \frac{x^{2l}}{(1+x)^{2l}}\right) + \ldots \,. \tag{21}$$

Полагая в (21) $x = \frac{1}{2}$, получим

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \frac{(2k-1)!}{(2k-2l)!} = \alpha\left(\frac{1}{2}\right) < (2l-1)!$$

Следовательно,

$$|R_{n,l}^{(2)}| \leqslant \frac{\pi^3}{9} \cdot \frac{1}{\pi^{2l}} \cdot \frac{(2l-1)!}{(2n+1)^{2l+2}} < \frac{3,446}{\pi^{2l}} \cdot \frac{(2l-1)!}{(2n+1)^{2l+2}}. \tag{22}$$

Оценим слагаемое A_4 из (15″):

$$|R_{n,l}^{(3)}| = |A_4| < \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{1}{\pi^{2l+2}} \cdot \frac{1}{(2n+1)^{2l+2}} \frac{\pi^2}{6} \sum_{k=l+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \times$$

$$\times \frac{(2k-1)!}{(2(k-l-1))!} = \frac{\pi}{9} \cdot \frac{1}{\pi^{2l}} \cdot \frac{1}{(2n+1)^{2l+2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2l+1} \times$$

$$\times \sum_{k=l+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-2l-2} \cdot \frac{(2k-1)!}{(2(k-l-1))!}. \tag{23}$$

Для вычисления суммы в (23) учтем, что для вспомогательной функции $\beta(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)$, $|x| < 1$ справедливо равенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^{2k-1}\right)^{(2l+1)} = \sum_{k=l+1}^{\infty} x^{2k-2l-2} \frac{(2k-1)!}{(2(k-l-1))!} = \frac{(2l+1)!}{2} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{(1-x)^{2l+2}} + \frac{1}{(1+x)^{2l+2}}\right],$$

полагая в котором $x = \frac{1}{2}$, найдем

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-2l-2} \frac{(2k-1)!}{(2(k-l-1))!} = \frac{(2l+1)!}{2}\left[2^{2l+2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2l+2}\right].$$

Подставляя найденное значение суммы в (23), получим

$$|R_{n,l}^{(3)}| < \frac{\pi}{9} \cdot \frac{1}{\pi^{2l}} \cdot \frac{1}{(2n+1)^{2l+2}} \cdot (2l+1)!\left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{2l+2}\right] <$$

$$< \frac{0{,}388}{\pi^{2l}} \cdot \frac{(2l+1)!}{(2n+1)^{2l+2}}. \tag{24}$$

Преобразуем, наконец, последнюю сумму в (14) с учетом (10):

$$\frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} = \frac{4}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) = \frac{4}{\pi}\Bigg[\mathrm{C} + \ln 2n - \frac{1}{4n} +$$

$$+ 2 \cdot \sum_{\nu=1}^{l} (-1)^{\nu} \cdot \frac{(2\nu-1)!}{(2\pi)^{2\nu}} \cdot \zeta(2\nu) \cdot (2n)^{-2\nu} + (-1)^{l+1} \times$$

$$\times \frac{\theta' - 2(2l+1)!\,\zeta(2l+2)}{(2\pi)^{2l+2} \cdot (2n)^{2l+2}} - \frac{1}{2}\mathrm{C} - \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{4n} - \sum_{\nu=1}^{l} (-1)^{\nu} \times$$

$$\times \frac{(2\nu-1)!}{(2\pi)^{2\nu}} \cdot \frac{\zeta(2\nu)}{n^{2\nu}} - (-1)^{l+1} \cdot \theta'' \cdot \frac{(2l+1)!\,\zeta(2l+2)}{(2\pi)^{2l+2} \cdot n^{2l+2}}\Bigg] =$$

$$= \frac{4}{\pi}\Bigg[\frac{1}{2}\mathrm{C} + \ln 2 + \frac{1}{2} \cdot \ln n + 2 \cdot \sum_{\nu=1}^{l} (-1)^{\nu} \cdot \frac{(2\nu-1)!}{(2\pi)^{2\nu}} \times$$

$$\times \frac{1 - 2^{2\nu-1}}{(2n)^{2\nu}} \cdot \zeta(2\nu)\Bigg] + R_{n,l}^{(4)}, \tag{25}$$

где

$$|R_{n,l}^{(4)}| \leqslant \frac{4}{\pi} \cdot \frac{2(2l+1)!\,\zeta(2l+2)}{(2\pi)^{2l+2} \cdot (2n)^{2l+2}} \cdot 2^{2l+1} < \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{(2l+1)!}{\pi^{2l} \cdot (2n)^{2l+2}} <$$

$$< \frac{0{,}213}{\pi^{2l}} \cdot \frac{(2l+1)!}{(2n)^{2l+2}}. \tag{26}$$

Подставляя в (14) и (15) значения слагаемых из (16), (19), (25) и остатков из (17), (22), (24), (26), получим асимптотическое разложение величины $\widetilde{\lambda}_n$ вида (4) и оценку

$$|R_{n,l}| \leqslant \left[\frac{0{,}539}{2^{2l}} + \frac{3{,}446 \cdot (2l-1)!}{\pi^{2l}} + \frac{0{,}388 \cdot (2l+1)!}{\pi^{2l}} \right] \times$$

$$\times \frac{1}{(2n+1)^{2l+2}} + \frac{0{,}213}{\pi^{2l}} \cdot \frac{(2l+1)!}{(2n)^{2l+2}}.$$

Отсюда легко следует справедливость теоремы.

1. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II. М., «Наука», 1970, с. 864.
2. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций, т. I. М., «Наука», 1967, с. 486.
3. А. О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей. М., Наука, 1967, с. 376.
4. А. Х. Турецкий. Теория интерполирования в задачах. Минск, Вышейшая школа, 1968, с. 440.
5. В. К. Дзядык, В. В. Иванов. Об асимптотике и оценках равномерных норм интерполяционных многочленов Лагранжа по узлам Чебышева. An math. 8, 1981.
6. H. Ehlich und K. Zeller, Auswertung der Normen von Jnterpolationsoperatoren, Math. Annalen, 164, 105—112 (1966).
7. T. I. Rivlin, The Chebyshev polynomials, John Wolay and Sons, New York, 1974, 186.
8. E. W. Cheney and T. J. Rivlin, A note on some Lebesgue constants, Center for numerical analysis The uniwersity of Texas at Austin. February, 1975, CNA—98, 1—7.
9. C. de Boor and Pinkus, Proof of the conjectures of Bernstein and Erdös concerning the optimal nodes for polynomial interpolation, J. of Approximation Theory, 24, 1978, 286—303.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
28.12.1980 г.