УДК 517.948.3

Б. Д. Котляр, Т. Н. Семиренко

О спектре операторов, повышающих гладкость

В работах [1], [2] проведено исследование скорости убывания собственных и сингулярных чисел операторов, повышающих гладкость функций, принадлежащих пространствам Соболева $W_2^{(l)}$, причем в [1] полученные результаты применяются для оценки резольвенты эллиптического дифференциального уравнения (подробную библиографию по рассматриваемым вопросам см. в [3]). Для теории дифференциальных уравнений представляет интерес исследование поведения спектра операторов, действующих в анизотропных пространствах функций.

Пусть $\Gamma \equiv \Gamma(a)$ — множество всех точек γ из целочисленной решетки пространства $\mathbf{R}^n$, $\gamma \geqslant 0$ таких, что $\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{\alpha_i} \leqslant a$, где $a \in \mathbf{R}^+$, $\alpha \in \mathbf{R}^n$, $\alpha > 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1$. Отношение $\gamma < \gamma'$ задает частичное упорядочение множества Γ. Множество максимальных векторов γ из Γ при этом упорядочении обозначим через Γ_0.

Положим $W_2^{(\alpha,a)}(G) = \{u \mid D^\gamma u \in L_2(G),\ \gamma \in \Gamma\}$, где $G \subset \mathbf{R}^n$ — куб с ребрами, параллельными координатным осям (можно считать, что G — область в $\mathbf{R}^n$, из которой возможно продолжение соответствующего класса функций на некоторый куб $\{x \in \mathbf{R}^n \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, n\}$; в случае целых $\alpha_i a$ достаточные условия для возможности такого продолжения приведены в [4]). Пространство $W_2^{(\alpha,a)}(G)$ снабжается нормой

$$\| u \|_{W_2^{(\alpha,a)}(G)} \equiv \Big(\sum_{\gamma \in \Gamma} \| D^\gamma u \|^2_{L_2(G)} \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим линейный ограниченный оператор $T: W_2^{(\alpha,a)}(G) \to W_2^{(\alpha,a)}(G)$ с областью значений $R(T) \subset W_2^{(\alpha,b)}(G)$ для некоторого $b > a$. Через $\widetilde{T}$ обозначим оператор, задающий то же соответствие, что и оператор T, но действующий из $W_2^{(\alpha,a)}(G)$ в $W_2^{(\alpha,b)}(G)$. В силу теоремы о замкнутом графике $\widetilde{T}$ — линейный ограниченный оператор.

Теорема 1. *Пусть $S_j(T)$ — сингулярные числа оператора T; тогда для некоторой постоянной $c > 0$ (не зависящей от j) выполняются неравенства*

$$s_j(T) \leqslant c j^{-r} \| \widetilde{T} \|, \tag{1}$$

где $r = (b - a)\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha_j} \Big)^{-1}$.

Отметим ([5], гл. 2), что степенной порядок убывания сингулярных чисел влечет такой же порядок убывания собственных чисел, т. е. $\lambda_j = O(j^{-r})$ при $j \to \infty$. (2)

Следствие 1. *Пусть* $T: W_2^{(\alpha,a)} \to W_2^{(\alpha,a)}$ *и* $R(T) \subset W_2^{(\beta,b)}$, $\alpha_i a < \beta_i b$ *для всех* $i = 1, \ldots, n$. *Тогда* $s_j(T) = O(j^{-r})$ *при* $j \to \infty$, *где*

$$r = \left(a - b \min_i \frac{\beta_i}{\alpha_i}\right)\left(\sum_1^n \frac{1}{\alpha_i}\right)^{-1}. \tag{2}$$

Далее $\mathfrak{S}_p$, $p > 0$, $\mathfrak{S}_\omega$ *означают, как обычно известные симметрично-нормированные идеалы кольца ограниченных операторов в* L_2 [5].

Теорема 2. *Пусть* $T: W_2^{(\alpha,a)} \to W_2^{(\alpha,a)}$, $R(T) \subset W_2^{(\alpha,b)}$, $b > a$, *а для некоторого действительного числа* $p > 0$ $\widetilde{T} \in \mathfrak{S}_p(W_2^{(\alpha,a)}, W_2^{(\alpha,b)})$; *тогда*

$$s_j(T) = o(j^{-r}) \quad \text{при} \quad j \to \infty, \tag{3}$$

где $r = (b-a)\left(\sum_1^n \frac{1}{\alpha_i}\right)^{-1} + \frac{1}{p}$.

Из теоремы 2 следует, что для любого $q > \frac{1}{r}$ $T \in \mathfrak{S}_q(W_2^{(\alpha,a)}, W_2^{(\alpha,a)})$.

Приведенные результаты применяются к оценке сингулярных чисел интегральных операторов Фредгольма

$$A\varphi = \int_G A(t, s)\,\varphi(s)\,ds, \quad t, s \in G \subset \mathbf{R}^n,$$

действующих из $L_2(G)$ в $L_2(G)$.

Обозначим через $A_{\gamma 0}(t, s)$ производные в среднем ядра $A(t, s)$ по переменной $t = \{t_1, \ldots, t_n\}$ порядка $\gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ ([5], гл. 3).

Теорема 3. Если $A_{\gamma 0} \in L_1(G \times G)$, $\gamma \in \Gamma_0$ — ядра операторов $A_\gamma \in \mathfrak{S}_p$, $p > 0$, то

$$s_j(A) = o(j^{-r}) \quad \text{при} \quad j \to \infty, \tag{4}$$

где $r = a\left(\sum_1^n \frac{1}{\alpha_i}\right)^{-1} + \frac{1}{p}$.

Если $A_\gamma \in \mathfrak{S}_\omega$, то

$$r = a\left(\sum_1^n \frac{1}{\alpha_i}\right)^{-1}.$$

Из теоремы 3 следует, что для любого $q > \frac{1}{r}$

$$A \in \mathfrak{S}_q(L_2(G), L_2(G)). \tag{5}$$

Отметим, что в случае изотропных пространств ($\alpha_i = \alpha_1$ для всех $i = 2, \ldots, n$) полученные результаты дают соответствующие теоремы из [1] (см. (1)), [2] (см. (1), (3), (4) при $p = 2$), [6] (см. (4), (5) при $n = 1$, $p = 2$), [7] (см. (5) при $n = 1$; это дает результат сильнее, чем в [7] при $p > 2$ и слабее при $1 \leqslant p < 2$).

Полагая в теореме 3 $A(x, y) = f(x - y)$, получаем следующее следствие.

Следствие 2. *Если* 2π — *периодическая функция* f *имеет производные* $f^\gamma \in L_2(G)$, $\gamma \in \Gamma_0$, *то* $c_n(A) = o(j^{-r})$ при $j \to \infty$, *где*

$$r = a\left(\sum_{1}^{n} \frac{1}{\alpha_i}\right)^{-1} + \frac{1}{2},$$

$\{c_n\}$ — *невозрастающая по модулю перестановка последовательности коэффициентов Фурье функции* f.

Пусть $u \in L_2(Q)$, где $Q = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x_j| \leqslant \pi,\ j = 1, \ldots, n\}$, и

$$u(x) = \sum_{l_1,\ldots,l_n} a_{l_1,\ldots,l_n} e^{i(l_1 x_1 + \ldots + l_n x_n)} \text{ —}$$

ее разложение в ряд Фурье. Введем линейные операторы A_k^+, A_k^-, действующие в $L_2(Q)$:

$$A_k^+ u = \sum_{l_1,\ldots,l_n} (1 + l_1^{2k_1} + \ldots + l_n^{2k_n})^{\frac{1}{2}} a_{l_1,\ldots,l_n} e^{i(l_1 x_1 + \ldots + l_n x_n)},$$

$$A_k^- u = \sum_{l_1,\ldots,l_n} (1 + l_1^{2k_1} + \ldots + l_n^{2k_n})^{-\frac{1}{2}} a_{l_1,\ldots,l_n} e^{i(l_1 x_1 + \ldots + l_n x_n)}.$$

Так как $A_k^- (W_2^{(\alpha,a)}(Q)) \subset W_2^{(\alpha,a)}(Q)$, $\| A_k^- u \|_{W_2^{(\alpha,a)}}(Q) \leqslant \| u \|_{W_2^{(\alpha,a)}}(Q)$ для $a > 0$ и $k_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, то существует линейный ограниченный оператор $A_{k,a}^- : W_2^{(\alpha,a)} \to W_2^{(\alpha,a)}$, совпадающий на $W_2^{(\alpha,a)}(Q)$ с оператором A_k^-.

Лемма. *Для любых* $a > 0$ *и* $k_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, $s_j(A_{k,a}^-) = O(j^{-r})$ *при* $j \to \infty$, *где* $r = \left(\sum_{1}^{n} \frac{1}{k_i}\right)^{-1}$.

Доказательство. В случае, когда существует i, для которого $k_i = 0$, тогда вследствие очевидного соотношения $s_j(A_{k,a}^-) = O(1)$ утверждение леммы тривиально.

Если $k_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, то $A_{k,a}^-$—самосопряженный компактный оператор, то $\{(1 + l_1^{2k_1} + \ldots + l_n^{2k_n})^{-\frac{1}{2}}\}_{l_1,\ldots,l_n=-\infty}^{\infty}$ — сингулярные числа оператора $A_{k,a}^-$, совпадающие с собственными числами; $\{e^{i(l_1 x_1 + \ldots + l_n x_n)}\}_{l_1,\ldots,l_n}$ — соответствующие им собственные функции. Обозначим через $\{\nu_j\}_1^{\infty}$ последовательность, полученную из последовательности

$$\{1 + l_1^{2k_1} + \ldots + l_n^{2k_n}\}_{l_1,\ldots,l_n=-\infty}^{\infty} \tag{6}$$

перестановкой ее членов в порядке неубывания; тогда $s_j(A_{k,a}^-) = \nu_j^{-\frac{1}{2}}$, $j = 1, 2, \ldots$

Пусть N — число точек с целочисленными координатами в теле

$$M(R, m) = \left\{x \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{1}^{n} x_i^{m_i} \leqslant R,\ x_i \geqslant 0\right\},$$

где $m_i > 0$ для $i = 1, \ldots, n$. Объем этого тела равен:

$$V = \int\limits_{\substack{x_1,\ldots,x_n \geqslant 0 \\ x_1^{m_1} + \ldots + x_n^{m_n} \leqslant R}} \cdots \int dx_1 \ldots dx_n = \frac{R^{\sum_1^n \frac{1}{m_i}} \Gamma\left(\frac{1}{m_1}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{1}{m_n}\right)}{m_1 \cdot \ldots \cdot m_n \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{m_1} + \ldots + \frac{1}{m_n}\right)}.$$

членов последовательности (6), не превосходящих ν_j, столько, сколько целых точек в теле $M(\nu_j+1,\ 2k)$. Так как $\lim\limits_{R\to\infty}\dfrac{N}{V}=1$, то существует такая константа $c>0$, что $j\leqslant c(\nu_j-1)^{\sum_1^n \frac{1}{2k_i}}\leqslant c\nu_j^{\frac{1}{2}\sum_1^n\frac{1}{k_i}}$. Отсюда $\nu_j^{-\frac{1}{2}}\leqslant c_1 j^{-\left(\sum_1^n\frac{1}{k_i}\right)^{-1}}$, т. е. $s_j\ (A_{k,a}^-)=O\left(j^{-\left(\sum_1^n\frac{1}{k_i}\right)^{-1}}\right)$.

Доказательство теоремы 1. Без ограничения общности полагаем, что $G\subset Q$; k_i в выражениях для A_k^-, A_k^+ определим равенствами: $k_i=(b-a)\alpha_i$, $i=1,\dots,n$.

Пусть J — оператор сужения, действующий из $L_2(Q)$ в $L_2(G)$, т. е. $Ju=$ сужению функции $u(x)$ на $G\,(u\in L_2(Q))$. Обозначим через J_a часть оператора J с областью определения $D(J_a)=W_2^{(\alpha,a)}(Q)$. Тогда $J_a\in B(W_2^{(\alpha,a)}(Q),\ W_2^{(\alpha,a)}(G))$, $\|J_a\|=1$. В силу теоремы о продолжении оператора [4] существует линейный ограниченный оператор $P_b\in B(W_2^{(\alpha,b)}(G),\ W_2^{(\alpha,b)}(Q))$, такой что $J_bP_bu=u$, $u\in W_2^{(\alpha,b)}(G)$. Обозначим через $A_{k,b}^+$ оператор A_k^+, рассматриваемый как оператор, действующий из $W_2^{(\alpha,b)}(Q)$ в $W_2^{(\alpha,a)}(Q)$. Тогда

$$\|A_{k,b}^+u\|^2_{W_2^{(\alpha,a)}(Q)}=\sum_{\gamma\in\Gamma(a)}\|D^\gamma(A_{k,b}^+u)\|^2_{L_2(Q)}=\sum_{\gamma\in\Gamma(a)}\sum_{l_1,\dots,l_n}l_1^{2\gamma_1}\dots l_n^{2\gamma_n}(1+l_1^{2k_1}+\dots$$

$$\dots+l_n^{2k_n})a^2_{l_1,\dots,l_n}=\sum_{\gamma\in\Gamma(a)}\sum_{l_1,\dots,l_n}l_1^{2\gamma_1}\dots l_n^{2\gamma_n}a^2_{l_1,\dots,l_n}+\sum_{j=1}^n\sum_{\gamma\in\Gamma(a)}\sum_{l_1,\dots,l_n}l_1^{2\gamma_1}\dots$$

$$\dots l_{j-1}^{2\gamma_{j-1}}l_j^{2(\gamma_j+k_j)}l_{j+1}^{2\gamma_{j+1}}\dots l_n^{2\gamma_n}a^2_{l_1,\dots,l_n}\leqslant\sum_{\gamma\in\Gamma(b)}\sum_{l_1,\dots,l_n}l_1^{2\gamma_1}\dots l_n^{2\gamma_n}a^2_{l_1,\dots,l_n}+$$

$$+\sum_{j=1}^n\sum_{\gamma\in\Gamma(b)}\sum_{l_1,\dots,l_n}l_1^{2\gamma_1}\dots l_{j-1}^{2\gamma_{j-1}}l_j^{2(\gamma_j+k_j)}l_{j+1}^{2\gamma_{j+1}}\dots l_n^{2\gamma_n}a^2_{l_1,\dots,l_n}=$$

$$=(n+1)\sum_{\gamma\in\Gamma(b)}\sum_{l_1,\dots,l_n}l_1^{2\gamma_1}\dots l_n^{2\gamma_n}a^2_{l_1,\dots,l_n}=(n+1)\|u\|^2_{W_2^{(\alpha,b)}}(Q).$$

Учитывая равенства

$$A_{k,a}^-A_{k,b}^+u=u\ \ \forall u\in W_2^{(\alpha,b)}(Q),\ \ J_bP_bu=J_aP_bu=u\ \ \forall u\in W_2^{(\alpha,b)}(G),$$

получаем, что $Tu=J_aA_{k,a}^-A_{k,b}^+P_b\widetilde{T}u$ для всех $u\in W_2^{(\alpha,a)}(G)$. Оценивая сингулярные числа оператора T и применяя лемму, получаем $s_j(T)\leqslant\|J_a\|\times\|A_{k,b}^+\|\cdot\|P_b\|\cdot\|\widetilde{T}\|\cdot s_j(A_{k,a}^-)\leqslant cj^{(a-b)\left(\sum_1^n\frac{1}{\alpha_i}\right)^{-1}}\|\widetilde{T}\|$, где $c=c_1(n+1)\|P_b\|$.

Доказательство теоремы 2. Используя теорему 1 и компактность оператора $\widetilde{T}$, оценим сингулярные числа оператора $T=J_aA_{k,a}^-A_{k,b}^+P_b\widetilde{T}$:

$$s_{2j-1}(T)\leqslant s_j(J_aA_{k,a}^-)\cdot s_j(A_{k,b}^+P_b\widetilde{T})\leqslant$$

$$\leqslant\|J_a\|\cdot\|A_{k,b}^+\|\cdot\|P_b\|\cdot s_j(A_{k,a}^-)\cdot s_j(\widetilde{T})\leqslant cj^{(a-b)\left(\sum_1^n\frac{1}{\alpha_i}\right)^{-1}}s_j(\widetilde{T}).$$

Так как $\widetilde{T} \in \mathfrak{S}_p (W_2^{(\alpha,a)}, W_2^{(\alpha,b)})$, то $\sum\limits_{j=1}^{\infty} j^{(b-a)\left(\sum\limits_1^n \frac{1}{\alpha_i}\right)^{-1} p} s_j^p (T) \leqslant c \sum\limits_j s_j^p (\widetilde{T}) < \infty.$

Для доказательства используем следующее вспомогательное утверждение [11]: Если последовательность $\{a_j\}$ не возрастает и $a_j > 0$, то при $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ из того, что $\sum\limits_j j^\alpha a_j^\beta < \infty$ следует $a_j = o(j^{-\frac{\alpha+1}{\beta}})$. Учитывая, что $\alpha = (b-a)\left(\sum\limits_1^n \frac{1}{\alpha_i}\right)^{-1} p$, $\beta = p$ получаем

$$s_j = o\left(j^{(a-b)\left(\sum\limits_1^n \frac{1}{\alpha_i}\right)^{-1} - \frac{1}{p}}\right).$$

Доказательство теоремы 3. Заметим, что для любой β раз непрерывно дифференцируемой функции $g(t)$, $t \in G$, обращающейся в нуль на границе G вместе со своими производными $\beta - 1$ порядка в силу суммируемости $A_{\beta 0}(t, s)$ ([5], гл. 3, §10) почти для всех $s \in G$ имеют место равенства

$$\int\limits_G A(t, s) D^\beta g(t)\, dt = (-1)^{|\beta|} \int\limits_G A_{\beta 0}(t, s) g(t)\, dt.$$

Используя теорему Фубини для любой функции $f \in L_2(G)$, получаем равенства

$$\int\limits_G (Af)(t) D^\gamma g(t)\, dt = (-1)^{|\gamma|} \int\limits_G (A_\gamma f)(t) g(t)\, dt.$$

Следовательно, по определению обобщенных производных, любая функция $q = Af$, $f \in L_2$ имеет все обобщенные производные порядков $\gamma \in \Gamma$, т. е. $R(A) \subset W_2^{(\alpha,a)}(G)$.

Покажем, что оператор A, рассматриваемый как оператор, действующий из $L_2(G)$ в $W_2^{(\alpha,a)}(G)$, принадлежит $\mathfrak{S}_p(L_2(G), W_2^{(\alpha,a)}(G))$.

Пусть $r \in \mathbf{N}$, $r = r(\alpha, a)$ — число целых точек множества Γ. Используя минимаксное свойство сингулярных чисел:

$$s_{rj+1}(\widetilde{A}) = \min_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{rj}} \max_{\substack{\|\psi\|=1 \\ (\psi,\varphi_k)=0 \\ k=1,\ldots,rj}} \|\widetilde{A}\psi\|_{W_2^{(\alpha,a)}} = \min_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{rj}} \max_{\substack{\|\psi\|=1 \\ (\psi,\varphi_k)=0 \\ k=1,\ldots,rj}} \left(\sum_{\gamma\in\Gamma} \|D^\gamma \widetilde{A}\psi\|_{L_2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \min_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{rj}} \max_{\substack{\|\psi\|=1 \\ (\psi,\varphi_k)=0 \\ k=1,\ldots,rj}} \left(\sum_{\gamma\in\Gamma} \left\| \int\limits_G A_{\gamma 0}(t, s) \psi(s)\, ds \right\|_{L_2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \min_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{rj}} \left(\max_{\substack{\|\psi\|=1 \\ (\psi,\varphi_k)=0 \\ k=1,\ldots,j}} \left\| \int\limits_G A(t, s) \psi(s)\, ds \right\|_{L_2} + \ldots + \max_{\substack{\|\psi\|=1 \\ (\psi,\varphi_k)=0 \\ k=(r-1)j+1,\ldots,rj}} \left\| \int\limits_G A_{\gamma 0}(t, s) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \psi(s)\, ds \right\|_{L_2}\right) = \min_{\varphi_1,\ldots,\varphi_j} \max_{\substack{\|\psi\|=1 \\ (\psi,\varphi_k)=0 \\ k=1,\ldots,j}} \|A\psi\|_{L_2} + \ldots + \min_{\varphi_{(r-1)j+1},\ldots,\varphi_{rj}} \max_{\substack{\|\psi\|=1 \\ (\psi,\varphi_k)=0 \\ k=(r-1)j+1,\ldots,rj}} \times$$

$$\times \|A_{\gamma 0}\psi\|_{L_2} = \sum_{\gamma\in\Gamma} s_{j+1}(A_\gamma).$$

Отсюда $s_{rj+1}^p(\tilde{A}) \leqslant c \sum_{\gamma \in \Gamma} s_{j+1}^p(A_\gamma)$. Пусть $m \in \mathbf{N}$ — номер сингулярного числа, $1 + m_0$ — наименьший положительный вычет $m \pmod r$, тогда $m = rj + 1 + m_0$, $1 \leqslant m_0 \leqslant r$. Так как

$$s_m^p(\tilde{A}) \leqslant s_{rj+1}^p(\tilde{A}),$$

то

$$\sum_{m=m_0+1 \pmod r} s_m^p(\tilde{A}) \leqslant c \sum_j \sum_{\gamma \in \Gamma} s_{j+1}^p(A_\gamma).$$

Из того, что $A_\gamma \in \mathfrak{S}_p$ при $\gamma \in \Gamma_0$, следует, что $A_\gamma \in \mathfrak{S}_p$ при $\gamma \in \Gamma$ [10].

Имеем $\sum_j s_j^p(\tilde{A}) \leqslant cr \sum_j \sum_{\gamma \in \Gamma} s_{j+1}^p(A_\gamma) < \infty$. Таким образом, $\tilde{A} \in \mathfrak{S}_p(L_2(G), W_2^{(\alpha, a)}(G))$.

Применяя теорему 2, получаем искомую оценку.

Отметим, что основной результат настоящей заметки без доказательства опубликован в [12].

1. Agmon S. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems.— Comm. Pure Appl. Math., 1962, **15**, p. 119—147.
2. Параска В. И. Об асимптотике собственных и сингулярных чисел линейных операторов. повышающих гладкость.— Мат. сб., 1965, **68** (110), № 4, с. 623—631.
3. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Оценки сингулярных чисел интегральных операторов.— УМН, 1977, **32**, № 1, с. 17—84.
4. Бесов О. В., Ильин В. П. Естественное расширение класса областей в теоремах вложения.— Мат. сб., 1968. **75 (117)**, № 4, с. 483—495.
5. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.— 448 с.
6. Крейн М. Г. О характеристических числах дифференцируемых симметрических ядер.— Мат. сб., 1937, **2** (44), с. 725—732.
7. Котляр Б. Д. О сингулярных числах интегральных операторов.— ДАН, 1976, **229**, № 4, с. 794—796.
8. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т. I.— М.: Мир, 1965.— 615 с.
9. Блюмин С. Л., Котляр Б. Д. Операторы Гильберта—Шмидта и абсолютная сходимость рядов Фурье.— Изв. АН, сер. матем., 1970, **34**, с. 209—217.
10. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.— 332 с.
11. Котляр Б. Д. О сингулярных числах интегральных операторов — Дифференц. уравнения, 1978, **14**, № 8, с. 1473—1477.
12. Козубенко (Семиренко) Т. Н., Котляр Б. Д. О сингулярных числах операторов, повышающих гладкость.— В кн.: Школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тезисы докл., Минск: 1978, с. 66—67.

Днепропетровск
ВНИИМЕХЧЕРМЕТ

Поступила в редакцию 29.10.1979 г.;
после переработки — 31.03.1981 г.