УДК 517.91/943

С. М. Христианов

Совокупности моментных систем

Рассмотрим линейную систему n-го порядка

$$\dot{X} = A(t) X, \quad X = (x_j), \quad A = (a_{ij}) \tag{1}$$

и составим многомерную матрицу моментов $M(t)$ порядка ν по формуле

$$M(t) = (m_{i_1 i_2 \ldots i_\nu}), \quad m_{i_1 i_2 \ldots i_\nu} = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_\nu}. \tag{2}$$

Дифференцируя это равенство с учетом (1), получаем уравнение для $M(t)$

$$\frac{d}{dt} M(t) = [A(t) M(t)] = \sum_{r=1}^{\nu} [A(t) M(t)]_r,$$

$$[AM]_r = (c_{i_1 \ldots i_r \ldots i_\nu}), \quad c_{i_1 \ldots i_r \ldots i_\nu} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_r j} m_{i_1 \ldots j \ldots i_\nu}.$$

Рассмотрим семейство уравнений, зависящих от произвольной постоянной c,

$$\frac{d}{dt} M_c(t) = [A(t+c) M_c(t)] \tag{3}$$

или, обозначив $t + c = u$,

$$\frac{d}{dt} M(t, u) = [A(u) M(t, u)].$$

Но

$$\frac{d}{dt} M(t, u) = \frac{\partial}{\partial t} M(t, u) + \frac{\partial}{\partial u} M(t, u).$$

Поэтому уравнение (3) может быть записано как

$$\frac{\partial}{\partial t} M(t, u) = [A(u) M(t, u)] - \frac{\partial}{\partial u} M(t, u). \tag{4}$$

В системе (4) интересно знать не саму матрицу $M(t, u)$, а ее усреднение по произвольной постоянной c с некоторым распределением $d\alpha(c)$, а именно:

$$M(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} M(t, t+c)\, d\alpha(c).$$

Введем обозначение для оператора

$$L = -\frac{\partial}{\partial u} \tag{5}$$

и запишем уравнение (4) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} M(t, u) = [A(u) M(t, u)] + LM(t, u). \tag{6}$$

Систему (6) назовем моментной порядка ν, соответствующей уравнению (1).

Если вместо оператора (5) взять произвольный линейный оператор L, действующий в пространстве функций L_2 на множестве U, то класс динамических объектов, которые описывает уравнение (6), необычайно расширится ([7]). Моментные системы (6) для разных ν описывают одну и ту же динамическую систему. Выяснению некоторых достаточных условий того, как асимптотические свойства решений системы (6) зависят от ее порядка, посвящена настоящая работа.

1. Некоторые факты из теории многомерных матриц. В настоящей работе заимствованы некоторые обозначения и факты, содержащиеся в работе (7). Дополнительно имеет место следующее.

Обозначим l_ν и s_ν — линейные пространства многомерных матриц, соответственно симметричных многомерных матриц, порядка n, размерности ν. Норму матрицы $B \in l_\nu$ введем по формуле

$$\| B \| = \max_{r} \max_{ij,\, j \neq r} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{i_1 \ldots k \ldots i_\nu} \right)^{0,5}. \tag{7}$$

Норма линейного оператора P в l_ν определяется как обычно: $\| P \| = \max \| PB \|$, $\| B \| = 1$.

Пусть T — некоторая невырожденная квадратная матрица порядка n и матрицы B, $\widetilde{B} \subset s_\nu$ связаны соотношениями $\widetilde{B} = [T \ldots [TB]_\nu \ldots]_1$, $B = [T^{-1} \ldots [T^{-1}\widetilde{B}]_\nu \ldots]_1$. Обобщением нормы (7) матрицы $B \in s_\nu$ является T-норма: $\| B \|_T = \| \widetilde{B} \|$.

Лемма 1. *Если в пространстве E^n существует базис, состоящий из собственных векторов матрицы A с набором собственных значений $\{a_k\}$, таких, что $\operatorname{Re} a_k \leqslant -\delta < 0$, то для решения B уравнения*

$$\sum_{r=1}^{\nu} [AB]_r = C, \qquad C \in S_\nu \tag{8}$$

в T-норме при некоторой невырожденной матрице T справедлива оценка $\|B\|_T \leqslant \|C\|_T / \nu\delta$.

Доказательство. Пусть T — матрица перехода от базиса $\{e_k\} = \{(0, \ldots, 1, \ldots, 0)^*\}$ к базису $\{\widetilde{e}_k\}$, состоящему из собственных векторов матрицы A. Производя замену переменных в уравнении (8), сведем уравнение (8) к уравнению вида

$$\sum_{r=1}^{\nu} [TAT^{-1}\widetilde{B}]_r = \widetilde{C}, \tag{9}$$

причем матрица $D = TAT^{-1} = (\operatorname{diag} a_k)$ является диагональной. Решение $\widetilde{B}$ уравнения (9) представимо в виде

$$\widetilde{B} = -\int_0^\infty [e^{Dt} \ldots [e^{Dt}\widetilde{C}]_\nu \ldots]_1 \, dt. \tag{10}$$

Но $\| e^{Dt} \| \leqslant e^{-\delta t}$. Применяя эту оценку ν раз к интегралу (10), имеем

$$\| \widetilde{B} \| = \| B \|_T \leqslant \int_0^\infty e^{-\nu\delta t} \| \widetilde{C} \| \, dt = \| \widetilde{C} \| / \delta\nu = \| C \|_T / \delta\nu.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем индекс T в обозначении T-нормы будет опускаться, чтобы не были громоздкими обозначения.

2. Моментные методы. Рассмотрим систему (6) с матрицей $A(u) = A + \mu B(u)$. Пусть многомерные матрицы $M(t)$ допускают асимптотическое представление

$$M(t) = \int\limits_U M(t, u)\, du = e^{Kt}(C + o)\, M(0), \tag{11}$$

где K и C — постоянные линейные операторы в конечномерном линейном пространстве s_ν, o — бесконечно малый оператор при $t \to \infty$. Собственные значения оператора K назовем характеристическими показателями системы (6). Наибольший действительный характеристический показатель, который не менее действительной части остальных характеристических, показателей, назовем главным характеристическим показателем, $\alpha_{(\nu)}$, если такой существует.

Пусть δ — некоторое множество четных положительных чисел (в частности всех четных положительных чисел). Пусть для всех $\nu \in \sigma$ решение системы (6) допускает представление (11). Наибольший из показателей $\alpha_{(\nu)}$, точнее $\alpha = \sup\limits_{\nu\in\delta} \alpha_{(\nu)}$ назовем главным характеристическим показателем по совокупности σ. Показатель α не всегда существует. Ниже даются некоторые достаточные условия существования α по совокупности всех четных положительных чисел.

Пусть $\{P_k(u),\ k = 0, \pm 1,\ \ldots\}$ — ортонормированный с весом $\rho(u)$ базис пространства функций L_2 на множестве U, состоящий из собственных функций линейного оператора L:

$$LP_k(u)\rho(u) = -\lambda_k P_k(u)\rho(u), \quad P_{-k} = \overline{P_k},$$
$$\lambda_{-k} = \bar{\lambda}_k, \quad P_0(u) \equiv 1, \quad (P_j(u), P_k(u)) = \int\limits_U P_j P_k \rho\, du$$

Относительно спектра $\{\lambda_k\}$ предполагаем, что выполняется свойство $Re(\lambda_{k+1} - \lambda_k) > \lambda > 0$, $k \geqslant 0$, $\lambda_0 = 0$ с некоторой положительной постоянной λ.

Собственные числа $\{a_k\}$ матрицы A имеют одну и ту же отрицательную вещественную часть: $Re\, a_k = -\delta$, $\delta > 0$. Матрица $B(u)$ измерима и ограничена на U и такова, что

$$(B(u)P_j(u), P_k(u)) = \varphi_{kj}, \quad \|\varphi_{kj}\| \leqslant \text{const} \quad \varphi_{kj} = 0 \text{ при } |k - j| \neq 1,$$
$$\varphi_{kj} \neq 0 \quad \text{при } |k - j| = 1$$

Последнее условие кажется слишком ограничительным, однако в приложениях этот случай часто встречается.

Теорема. *При перечисленных выше условиях имеет место неравенство* $\alpha^{(\nu)} < \alpha^{(2)}$ *при достаточно малых* $0 \leqslant \mu < \mu_0$, *а, значит,* $\alpha = \alpha^{(2)}$, $\nu = 4, 6, \ldots$.

Доказательство. Введем обозначения для операторов

$$\mathbf{A}F = \sum_{r=1}^{\nu} [AF]_r, \quad \mathbf{\Phi}_{kj}F = \sum_{r=1}^{\nu} [\varphi_{kj}F]_r, \quad F \in s_\nu.$$

Будем искать решение моментной системы (6) в виде ряда

$$M(t, u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k(t) P_k(u) \rho(u), \quad C_{-k} = \bar{C}_k \subset s_\nu.$$

Подставляя это разложение в систему (6) и умножая скалярно полученное соотношение на $P_k(u)$, получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{C}_k = \mathbf{A}C_k + \mu\mathbf{\Phi}_{kk-1}C_{k-1} + \mu\mathbf{\Phi}_{kk+1}C_{k+1} - \lambda_k C_k$$

или в терминах преобразования Лапласа $F_k(p) \doteqdot C_k(t)$

$$(\mathbf{A} - (\lambda_k + p) E) F_k + \mu \mathbf{\Phi}_{kk-1} F_{k-1} + \mu \mathbf{\Phi}_{kk+1} F_{k+1} = - C_k(0). \qquad (12)$$

Положим $C_k(0) = 0$, $k \neq 0$, $C_0(0) \neq 0$. Собственные значения $a_k^{(\nu)}$ оператора $\mathbf{A}$ находятся по формуле $\{a_k^{(\nu)}\} = \{a_{i_1} + \ldots + a_{i_\nu}, 1 \leqslant \ldots \leqslant i_\nu \leqslant n\}$. Для четных ν среди этого множества, которое лежит на прямой $\{p: Re p = = -\nu\delta\}$, есть действительное значение $\alpha^{(\nu)} = -\delta\nu$. Пусть $H = \{p: Re p > > -2\delta - \min(\delta, \lambda)\}$ — полуплоскость комплексной плоскости.

Операторное соотношение (12) можно переписать как

$$F_k + \mu G_{kk-1} F_{k-1} + \mu G_{kk+1} F_{k+1} = 0, \quad k \neq 0 \qquad (13)$$

$$(\mathbf{A} - pE) F_0 + \mu \mathbf{\Phi}_{01} F_{-1} + \mu \mathbf{\Phi}_{01} F_1 = - C_0(0)$$

$$G_{kj} = (\mathbf{A} - (\lambda_k + p) E)^{-1} \mathbf{\Phi}_{kj}, \quad k \neq 0, \quad \| \mathbf{\Phi}_{kj} \| \leqslant \nu\varphi$$

$$\| \varphi_{kj} \| \leqslant \varphi = \mathrm{const}$$

и справедливы оценки

$$\| G_{kj} \| = \left\| - \int_0^\infty [e^{At} \ldots [e^{At} \mathbf{\Phi}_{kj}]_\nu \ldots]_1 e^{-(\lambda_k + p)t} dt \right\| \leqslant \frac{\nu\varphi}{\nu\delta + Re(\lambda_k + p)} \leqslant c,$$

причем эта постоянная не зависит от λ_k, $\nu = 4, 6, \ldots$ и $p \in H$.

Уравнение (13) будет разрешено, если разрешится операторное уравнение

$$Q_{k-1} + \mu G_{kk-1} + \mu G_{kk+1} Q_k Q_{k-1} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad F_k = Q_{k-1} F_{k-1}$$

или

$$Q_{k-1} = - \mu (E + \mu G_{kk+1} Q_k)^{-1} G_{kk-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (14)$$

Соотношение (14) образует операторную цепную дробь.

Лемма 2. *Цепная дробь (14) сходится в полуплоскости H, причем оператор Q_0 (равно, как и Q_k) в ней аналитичен и ограничен равномерно по ν.*

Доказательство этого утверждения может быть проделано аналогично доказательству теоремы сходимости в работе [5].

Рассмотрим теперь уравнения для нахождения F_0. Имеем

$$(E + \mu (\mathbf{A} - pE)^{-1} (G_{0,-1} \bar{Q}_0 + G_{01} Q_0)) F_0 = - (\mathbf{A} - pE)^{-1} C_0(0).$$

В силу свойства спектра оператора L оператор

$$E + \mu (\mathbf{A} - pE)^{-1} G_{01} Q_0$$

аналитичен и обратим в полуплоскости H при достаточно малых μ, а оператор $(A - pE)^{-1}$ аналитичен в H. Значит, матрица $F_0(p)$ аналитична в H и характеристические показатели, в том числе главные, системы (6) лежат не в H при $\nu = 4, 6, \ldots$. Если $\mu = 0$, то показатель $\alpha^{(2)}$ лежит в H. При достаточно малых μ он также будет лежать в H. Если в качестве μ_0 выбрать наименьшее из всех ограничений на μ, то доказательство теоремы на этом будет закончено.

3. Контрпример. Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} x = (a + b\xi_t) x, \qquad (15)$$

в котором a, b — постоянные, ξ_t — случайный гауссовский процесс на прямой $U = (-\infty, +\infty)$, задаваемый стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\xi_t = -\omega \xi_t dt + \sigma dW_t$$

Пусть $m(t) = m_\nu(t) = Ex^\nu(t)$ — моменты порядка ν решения уравнения (15). Моментные уравнения, соответствующие задаче (15), имеют вид

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \nu(a + bu)\, m + \frac{\partial(\omega u m)}{\partial u} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 m}{\partial u^2}, \tag{16}$$

в которых частные моменты $m(t, u)$ связаны с моментами $m(t)$ по формуле

$$m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t, u)\, du.$$

Будем искать решение уравнения (16) в виде ряда

$$m(t, u) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t)\, P_k(u) \exp(-\omega u^2/\sigma^2)$$

по ортогональным полиномам Эрмита $\{P_k(u)\}$, для которых справедливы соотношения

$$-\omega u \frac{dP_k}{du} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2 P_k}{du^2} = -\omega k P_k(u),$$

$$u P_k(u) = \frac{1}{2\beta} P_{k+1} + k P_{k-1}, \quad \beta = \frac{\omega}{\sigma^2}.$$

Для коэффициентов c_k получаем бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{c}_0 = \nu a c_0 + \nu b c_1,$$

$$\dot{c}_k = (\nu a - \omega k)\, c_k + \frac{1}{2\beta}\nu b c_{k-1} + (k + 1)\, \nu b c_{k+1}$$

или в терминах преобразований Лапласа $f_k(p) \doteqdot c_k(t)$

$$p f_0 - c_0(0) = \nu a f_0 + \nu b f_1,$$

$$p f_k = (\nu a - \omega k)\, f_k + \frac{1}{2\beta}\nu b f_{k-1} + (k + 1)\, \nu b f_{k+1}.$$

Для нахождения $f_0(p)$, имеем уравнение

$$(p - \nu a - (\nu b)^2/2\beta\,(p - \nu a + \omega - 2\nu b q_1))\, f_0 = c_0(0)$$

$$q_{k-1} = \nu b/2\beta\,(p - \nu a + \omega k - \nu b\,(k + 1)\, q_k).$$

Уравнение для особых точек функции $f_0(p)$ записывается в виде

$$p - \nu a - \cfrac{(\nu b)^2/2\beta}{p - \nu a + \omega - \cfrac{(\nu b)^2/\beta}{p - \nu a + 2\omega - \ddots}} = 0. \tag{17}$$

Положим q_k постоянным и таким, что

$$\nu b\,(k + 1)\, q_k = \sigma^2 (\nu b)^2/2. \tag{18}$$

Положим также $\omega = 1$. Имеем равенство

$$p - \nu a + k - \sigma^2 (\nu b)^2/2 = k,$$

если вместо p подставить корень уравнения

$$p - \nu a - \sigma^2 (\nu b)^2/2 = 0. \tag{19}$$

Далее имеем

$$p - \nu a + k - 1 - k(\nu b)^2/2\beta k = k - 1$$

при том же значении p (19). Устремляя $\kappa \to \infty$, получаем утверждение о том, что корень алгебраического уравнения (19) является одновременно и корнем трансцендентного уравнения (17). Это означает, что функция $f_0(p)$ имеет особенности хотя бы в точке

$$p = \nu a + \sigma^2(\nu b)^2/2. \tag{20}$$

Полученный результат означает, что показатели $\alpha_{(\nu)}$ системы (16) неограниченно возрастают при возрастании ν.

Замечание 1. Пусть $a < 0$. Невозмущенная система (16) (при $b = 0$) явно устойчива асимптотически для любого порядка ν. Формула (20) означает, что система (16) устойчива асимптотически в смысле первых нескольких моментов при достаточно малых $b \neq 0$. Однако при любом фиксированном $b \neq 0$ система (16) становится неустойчивой, начиная с некоторого ν. Такой эффект вообще говоря невозможен в системах с ограниченными возмущениями.

Замечание 2. Если оператор L задан формулой (5) и действует в пространстве функций L_2 на единичной окружности $U = [0, 2\pi)$, причем

$$P_k(u) = e^{iku}/\sqrt{2\pi}, \quad B(u) = B(u + 2\pi), \quad \lambda_k = ik,$$

то решения моментных систем (6) находятся явно по формуле (2) из решений системы (1) с периодическими коэффициентами. Если при этом характеристические показатели системы (1) имеют отрицательные действительные части, то показатели $\alpha^{(\nu)}$ очевидно также отрицательны и $\alpha = \alpha^{(2)} > > \alpha^{(4)} > \ldots$. Если L — произвольный оператор, то указанное свойство, как показывает контрпример, может не выполняться.

Замечание 3. Существенное ограничение на спектр $\{a_k : \mathrm{Re}\, a_k = = -\delta\}$ матрицы A в теореме принято для того, чтобы заведомо существовало представление (II) для всех ν [6].

1. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. «Наука», М., 1967, с. 472.
2. Соколов Н. П. Теория пространственных матриц. ГИФМЛ, М., 1960.
3. Соколов Н. П. Введение в теорию многомерных матриц. «Наукова думка», Киев, 1972, с. 180.
4. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. «Наука». М., 1969, с. 576.
5. Хрисанов С. М. Устойчивость линейной системы, параметрически возбужденной случайным процессом одного класса. УМЖ, 1976, **29**, № 5, с. 699—703.
6. Хрисанов С. М. Характеристические показатели в стохастических системах. В кн.: Асимптотические методы нелинейной механики. К., 1979, с. 162—167.
7. Хрисанов С. М. О нелинейных уравнениях Фриша. УМЖ, 1980, **32**, № 1, с. 80—88.

Киевский институт
инженеров гражданской авиации

Поступила в редакцию
12.02.1981 г.