УДК 517.968.23

Ю. И. Черский

Интегральные уравнения в свертках с переменными коэффициентами

Некоторые частные виды таких уравнений известны. Это важное для приложений «характеристическое» сингулярное уравнение с ядром Коши [1], [2], уравнения со степенным или логарифмическим ядром [2]. В них присутствуют свертки искомой функции U с конкретными функциями x^{-1}, x^{ν}, $\ln x$.

В статье введены свертки искомой функции с функциями более общего вида. Решены три уравнения, определяемые линейными и ограниченными в $L_2(-\infty, \infty)$ операторами $\mathscr{K}_1$, $\mathscr{K}_2$ и $\mathscr{K}_3$. Правая часть уравнений $F(x)$ — задана в этом пространстве, находим $U(s) \in L_2(-\infty, \infty)$.

1. Уравнение, приводящееся к характеристическому на прямой:

$$\mathscr{K}_1 U \equiv c(x) \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}(x-s) U(s)\,ds + d(x) \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{S}(x-s) U(s)\,ds = F(x)$$

$$-\infty < x < \infty. \tag{1}$$

Коэффициенты $c(x)$ и $d(x)$ — заданные непрерывные функции. $\mathfrak{M}$ — заданная обобщенная функция, интеграл Фурье которой

$$\mathfrak{m}(t) = (\mathscr{V}^{-1}\mathfrak{M})(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}(x) e^{-ixt} dx$$

— локально суммируемая функция. Предположим также существование положительных постоянных c_0 и C таких, что для почти всех t

$$c_0 < |\mathfrak{m}(t)| < C. \tag{2}$$

Преобразование Фурье $\mathscr{V}$ обобщенных функций определяется обычным образом (см., например, [3]).

Обобщенная функция $\mathfrak{S}$ связана с $\mathfrak{M}$ равенством $\mathfrak{S} = \mathscr{V}(\mathfrak{m}(t)\,\mathrm{sgn}\, t)$.

Свертка в уравнении (1) понимается как предел в среднем (он существует)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}(x-s) U(s)\,ds = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{-\infty}^{\infty} M_n(x-s) U(s)\,ds,$$

где $M_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ — функции из $L_2(-\infty, \infty)$:

$$M_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} \mathfrak{m}(t) e^{ixt} dt.$$

Так же определена в уравнении вторая свертка.

Покажем, что в результате замены

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}(x-s)\, U(s)\, ds = \Psi(x) \quad (\in L_2(-\infty, \infty)) \tag{3}$$

уравнение (1) превращается в характеристическое с сингулярным интегралом в смысле главного значения:

$$c(x)\,\Psi(x) + \frac{d(x)}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(s)}{s-x}\, ds = F(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{4}$$

Для этой цели привлечем формулу *, справедливую для любой функции $\Psi(x)$ из $L_2(-\infty, \infty)$ и ее интеграла Фурье $\psi(t) = \mathcal{V}^{-1}\Psi$

$$\mathcal{V}[\psi(t)\operatorname{sgn} t] = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(x)}{s-x}\, ds.$$

Теперь нетрудно установить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{S}(x-s)\, U(s)\, ds = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(s)}{s-x}\, ds.$$

Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{S}(x-s)\, U(s)\, ds = \operatorname{l.i.m.} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(x-s)\, U(s)\, ds =$$

$$= \operatorname{l.i.m.} \int_{-n}^{n} [\mathfrak{m}(t)\operatorname{sgn} t]\, u(t)\, e^{ixt}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{l.i.m.} \int_{-n}^{n} [\psi(t)\operatorname{sgn} t]\, e^{ixt} dt = \mathcal{V}[\psi(t)\operatorname{sgn} t].$$

Полученное характеристическое уравнение (4) рассмотрим при предположении, что на сомкнутой оси $c^2(x) - d^2(x) \neq 0$. Тогда общее решение можно представить в форме (отличающейся от принятой в [1], [2])

$$\Psi(x) = \frac{c(x)\,F(x)}{c^2(x) - d^2(x)} - \frac{d(x)\,X^+(x)}{\pi i\,[c(x) - d(x)]} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(s)\, ds}{[c(s) + d(s)]\,X^+(s)\,(s-x)} +$$

$$+ \frac{d(x)\,X^+(x)\,P_{\alpha-1}(x)}{[c(x) - d(x)]\,(x+i)^{\alpha}}, \tag{5}$$

$$2\ln X^+(x) = \ln\left[\frac{c(x) - d(x)}{c(x) + d(x)} \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{\alpha}\right] +$$

$$+ \frac{x+i}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{(s+i)(s-x)} \ln\left[\frac{c(s) - d(s)}{c(s) + d(s)} \left(\frac{s+i}{s-i}\right)^{\alpha}\right],$$

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \left\{\arg \frac{c(x) - d(x)}{c(x) + d(x)}\right\}_{-\infty}^{+\infty}.$$

---

* Выведенную, вероятно, И. М. Рапопортом [4].

Здесь $P_{\alpha-1}(x)$ — многочлен степени не выше $\alpha - 1$ с произвольными комплексными коэффициентами; $P_{\alpha-1} \equiv 0$ при $\alpha \leqslant 0$. В случае $\alpha < 0$ уравнение разрешено лишь при выполнении условий

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)\,dx}{[c(x) + d(x)]\, X^{+}(x)\,(x+i)^{j}} = 0, \quad j = 1, \ldots, -\alpha. \tag{6}$$

Предположим, что характеристическое уравнение разрешимо и $\psi(s)$ — его решение. Тогда решение $U(x)$ исходного уравнения (1) можно построить по формулам

$$U(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Re(x - s)\, \Psi(s)\, ds, \quad \Re = \frac{1}{2\pi} \mathcal{V} \frac{1}{\mathfrak{m}}. \tag{7}$$

Так как благодаря неравенствам (2) между функциями U и ψ существует взаимно-однозначное соответствие (3), (7), то уравнения (1) и (4) равносильны. Поэтому можно утверждать, что $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{K}_1 = \max(0, \alpha)$; при $\alpha \geqslant 0$ неоднородное уравнение (1) разрешимо при любом свободном члене $F(x)$. В случае $\alpha < 0$ для разрешимости уравнения (1) необходимы и достаточны условия (6). Во всех случаях общее решение можно построить по формулам (7) и (5).

2. Уравнение с аналитическими ядрами.

$$\mathcal{K}_2 U \equiv a(x) \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}^{-}(x - s)\, U(s)\, ds +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}^{+}(x - s)\, b(s)\, U(s)\, ds = F(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{8}$$

Здесь коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ — заданные непрерывные функции, не равные нулю всюду на сомкнутой оси x. $\mathfrak{M}^{\pm}$ — заданные обобщенные функции, интегралы Фурье $\mathfrak{m}_{\pm}(t) = \mathcal{V}^{-1}\mathfrak{M}^{\pm}$ которых обладают свойствами: $\mathfrak{m}_{+}(t) = 0$ при $t < 0$; $\mathfrak{m}_{-}(t) = 0$ при $t > 0$ $c_0 < |\mathfrak{m}_{+}(t)| < C$ при $t > 0$; $c_0 < |\mathfrak{m}_{-}(t)| < C$ при $t < 0$, где c_0 и C положительные постоянные.

Для приведения уравнения к задаче Римана введем новые неизвестные функции

$$\Phi^{+}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}^{+}(x - s)\, b(s)\, U(s)\, ds, \tag{9}$$

$$\Phi^{-}(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}^{-}(x - s)\, U(s)\, ds. \tag{10}$$

Опираясь на известные [5, гл.V] свойства преобразования Фурье, нетрудно установить, что функции $\Phi^{+}(x)$ и $\Phi^{-}(x)$ суть предельные значения аналитических в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$ функций, представимых интегралом типа Коши с плотностью из $L_2(-\infty, \infty)$. Таким образом, уравнение (8) принимает форму задачи Римана на прямой:

$$\Phi^{+}(x) = a(x)\, \Phi^{-}(x) + F(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{11}$$

Схема решения задачи Римана известна (см., например, [1]—[3]). Выпишем формулы, дающие решение. Пусть $\alpha = \frac{1}{2\pi} \{\arg a(x)\}_{-\infty}^{+\infty}$. Тогда однородная задача Римана имеет ровно $\max(0, \alpha)$ линейно независимых решений. В случае $\alpha \geqslant 0$ неоднородная задача разрешима при любом свободном члене $F(x) \in L_2(-\infty, \infty)$; при $\alpha < 0$ для разрешимости необходимы и достаточны условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)\,ds}{X^+(x)(x+i)^\alpha} = 0, \quad j = 1, \ldots, -\alpha, \tag{12}$$

где

$$2 \ln X^+(x) = \ln\left[a(x)\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^\alpha\right] + \frac{x+i}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{(s+i)(s-x)} \ln\left[a(s)\left(\frac{s+i}{s-i}\right)^\alpha\right].$$

Общее решение задачи можно представить в форме

$$\Phi^+(x) = \frac{F(x)}{2} + \frac{X^+(x)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(s)\,ds}{X^+(s)(s-x)} + \frac{X^+(x)\,P_{\alpha-1}(x)}{(x+i)^\alpha}, \tag{13}$$

где $P_{\alpha-1}(x)$ — многочлен степени не выше $\alpha - 1$ с произвольными комплексными коэффициентами; $P_{\alpha-1} \equiv 0$ при $\alpha \leqslant 0$.

Предположим, что задача (11) разрешима (в противном случае неразрешимо и исходное уравнение (8)). Тогда вопрос сводится к нахождению функции U из уравнений (9) и (10), где Φ^+ и Φ^- — теперь известные функции, определенные формулами (13) и (11).

При решении удобно использовать проекционные операторы $\mathcal{P}^+$ и $\mathcal{P}^-$, определенные на пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ равенствами

$$\mathcal{P}^\pm U \equiv \frac{U(x)}{2} \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(x)}{s-x}\,ds.$$

Множества значений этих операторов обозначим через L_2^+ и L_2^- (элементами пространств $L_2^\pm$ являются предельные значения аналитических функций такие, как $\Phi^\pm(x)$).

Уравнением (10) вполне определяется функция $\mathcal{P}^- U$; она равна

$$(\mathcal{P}^- U)(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{R}^-(x-s)\,\Phi^-(s)\,ds, \quad \mathfrak{R}^- = \mathcal{V}\mathfrak{r}_-(t),$$

$$\mathfrak{r}_-(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t > 0 \\ \dfrac{1}{2\pi \mathfrak{m}_-(t)} & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Точно так же с помощью преобразования Фурье из уравнения (9) найдем

$$(\mathcal{P}^+ bU)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{R}^+(x-s)\,\Phi^+(s)\,ds, \tag{14}$$

$$\mathfrak{R}^+ = \mathcal{V}\mathfrak{r}_+(t), \quad \mathfrak{r}_+(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi \mathfrak{m}_+(t)} & \text{при } t > 0 \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Функция

$$(\mathcal{P}^- bU)(x) = \Psi^-(x) \quad (\in L_2^-) \tag{15}$$

остается пока неизвестной. С целью получить еще одну задачу Римана сложим равенства (14) и (15) ($\mathcal{P}^+ + \mathcal{P}^-$ — тождественный оператор)

$$b(x)\,U(x) = \Psi^-(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{R}^+(x-s)\,\Phi^+(s)\,ds$$

или

$$b(x)\,U^+(x) = \Psi^-(x) + G(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{16}$$

где $G(x)$ — принадлежащая $L_2(-\infty, \infty)$ известная функция

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{R}^+(x-s)\,\Phi^+(s)\,ds + b(x)\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{R}^-(x-s)\,\Phi^-(s)\,ds,$$

а искомыми являются $\Psi^-_{(x)}$ и $U^+(x) = \mathcal{P}^+U \quad (\in L_2^+)$.

Если задача Римана (16) разрешима, то определив $U^+(x)$, можно построить решение исходного уравнения (8) по формуле $U(x) = U^+(x) + \mathcal{P}^-U$. Результаты сформулируем в виде теорем.

Теорема 1. *Пусть* $\beta = \frac{1}{2\pi}\{\arg b(x)\}_{-\infty}^{+\infty}$. *Тогда в случае* $\alpha \geqslant 0$ *и* $\beta \leqslant 0$ *имеем* $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{K}_2 = \alpha - \beta$. *Уравнение* (8) *разрешимо при любой правой части* $F(x)$. *Общему решению можно придать вид*

$$U(x) = +\frac{G(x)}{2b(x)} + \frac{Y^-(x)}{2\pi i b(x)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(s)\,ds}{Y^-(s)(s-x)} +$$

$$+\frac{Y^-(x)\,Q_{-\beta-1}(x)\,(x-i)^{\beta}}{b(x)} - \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{R}^-(x-s)\,\Phi^-(s)\,ds, \tag{17}$$

$$2\ln Y^-(x) = \ln\left[b(x)\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{\beta}\right] - \frac{x-i}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{(s-i)(s-x)} \ln\left[b(s)\left(\frac{s+i}{s-i}\right)^{\beta}\right],$$

где $Q_{-\beta-1}(x)$ — *многочлен степени не выше* $(-\beta-1)$ *с произвольными комплексными коэффициентами;* $Q_{-1} \equiv 0$.

Теорема 2. *В случае* $\alpha < 0$, $\beta \leqslant 0$ *имеем* $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{K}_2 = -\beta$. *Для разрешимости неоднородного уравнения* (8) *необходимы и достаточны условия* (12). *Общее решение строится по формуле* (17), *где* $P_{\alpha-1} = 0$.

Теорема 3. *Если* $\alpha \leqslant 0$, *а* $\beta > 0$, *то* $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{K}_2 = 0$. *Для разрешимости уравнения необходима и достаточна совокупность условий* (12) *и*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(x)\,dx}{Y^-(x)(x-i)^j} = 0, \quad j = 1, \ldots, \beta; \tag{18}$$

при $\alpha = 0$ *условия* (12) *снимаются. Решение дается формулой* (17), *где* $P_{\alpha-1} \equiv Q_{-\beta-1} \equiv 0$.

Теорема 4. *Пусть* $\alpha > 0$ *и* $\beta > 0$. *Тогда для разрешимости уравнения* (8) *необходима и достаточна совместность алгебраической системы*

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1\alpha}\lambda_\alpha = g_1 \\ \quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ a_{\beta 1}\lambda_1 + a_{\beta 2}\lambda_2 + \ldots + a_{\beta\alpha}\lambda_\alpha = g_\beta \end{array}\right\}, \tag{19}$$

которая получается из условий (18) *при подстановке туда функции* $G(x)$, *содержащей многочлен*

$$P_{\alpha-1}(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x + \ldots + \lambda_\alpha x^{\alpha-1}. \tag{20}$$

Кроме того, $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{K}_2 = \alpha - \rho$, *где* ρ — *ранг матрицы системы* (19). *Общее решение уравнения* (8) *определяется формулой* (17), *где* $Q_{-\beta-1} \equiv 0$, *а в многочлене* (20) $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha)$ — *общее решение системы* (19).

3. Уравнение, приводящееся к задаче Карлемана:

$$\mathcal{K}_3 U \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{W}(x-i-s)\, U(s)\, ds + a(x) \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{W}(x+i-s)\, U(s)\, ds = F(x), \tag{21}$$
$$-\infty < x < \infty.$$

Здесь заданы непрерывные функции $a(x)$ и $\mathfrak{W}(x)$, причем последняя аналитически продолжима на полосу $-1 < \operatorname{Im} z < 1$. Точнее, для интеграла Фурье

$$\mathfrak{w}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{W}(x)\, e^{-ixt} dx$$

почти всюду на прямой предполагаются справедливыми оценки

$$c_0 < |\mathfrak{w}(t)|\, e^{|t|} < C \tag{22}$$

при некоторых положительных постоянных c_0 и C. Предельные значения $\mathfrak{W}(x \pm i)$ будут уже обобщенными функциями, так что свертки в уравнении понимаются в том же смысле, что и прежде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{W}(x \pm i - s)\, U(s)\, ds = \operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_n(x \pm i - s)\, U(s)\, ds,$$

$$W_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} \mathfrak{w}(t)\, e^{ixt} dt.$$

Приступая к решению, рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{W}(x-s)\, U(s)\, ds. \tag{23}$$

Пользуясь преобразованием Фурье, предположением (22) и результатами из [5], приходим к выводу, что функция $\Phi(x)$ аналитически продолжима на полосу $-1 < Im z < 1$, причем

$$\exists\, \text{const}, \quad \forall y \in [-1, 1]: \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x+iy)|^2\, dx < \text{const}. \tag{24}$$

Кроме того, предельные значения $\Phi(x \pm i)$ совпадают со свертками уравнения (21).

Таким образом уравнение (21) приведено к задаче Карлемана с искомой функцией Φ

$$\Phi(x-i) = -a(x)\, \Phi(x+i) + F(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{25}$$

Поскольку по любой функции $\Phi(x)$ класса (24) принадлежащая $L_2(-\infty, \infty)$ функция $U(x)$ определяется из уравнения (23) единственным образом:

$$U(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} V\left[\frac{1}{\mathfrak{w}(t)} (V^{-1}\Phi)(t)\right], \tag{26}$$

то можно говорить о равносильности исходного уравнения (21) и задачи Карлемана (25).

Далее ограничимся случаем, когда функция $a(x)$ не имеет нулей и на бесконечности обращается в единицу. Задача Карлемана при сходных предположениях решена в [3, с.139]. Используя это, приходим к следующим результатам. Пусть $\alpha = \frac{1}{2\pi}\{\arg a(x)\}_{-\infty}^{+\infty}$. Тогда $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{K}_3 = \max(0, \alpha)$. При $\alpha \geqslant 0$ общее решение неоднородного уравнения (21) существует и определено формулой (26), где

$$4\Phi(x) = X^+(-e^{\pi x}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(s)\,ds}{X^+(e^{\pi s})\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}(x-s)} +$$

$$+ X^+(-e^{\pi x}) P_{\alpha-1}(e^{\pi x})(e^{\pi x}-i)^{-\alpha} \exp\frac{\pi x}{2}, \tag{27}$$

$$2\ln X^+(\xi) = \ln A(\xi) + \frac{\xi+i}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \ln A(s)\frac{ds}{(s+i)(s-x)},$$

$$\left(\frac{\xi+i}{\xi-i}\right)^{\alpha} A(\xi) = \begin{cases} a\left(\frac{\ln\xi}{\pi}\right), & \xi > 0 \\ 1, & \xi \leqslant 0, \end{cases}$$

$P_{\alpha-1}(\xi)$ — многочлен степени не выше $\alpha - 1$ с произвольными комплексными коэффициентами, $P_{-1} \equiv 0$. В случае $\alpha < 0$ для разрешимости уравнения (21) необходимы и достаточны условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{X^+(e^{\pi s})} e^{\frac{\pi s}{2}} (e^{\pi s}+i)^{-j}\,ds = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, -\alpha.$$

Если они выполнены, то решение единственно и определено формулами (26) и (27), где $P_{\alpha-1} \equiv 0$. Вместо (8) так же можно решить уравнение $\mathcal{K}_2 U + \mathcal{P}^+\mathcal{A}\mathcal{P}^- U = F$, где $\mathcal{A}$— произвольный линейный ограниченный в $L_2(-\infty,\infty)$ оператор. Решение сопряженных уравнений теперь несложно. Так, уравнение

$$\mathcal{K}_1^* U \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}(s-x)\,c(s)\,U(s)\,ds + \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{S}(s-x)\,d(s)\,U(s)\,ds = F(x)$$

приводится к известному «союзному с характеристическим» [2], если на обе его части подействовать оператором $\mathcal{R}$, $(\mathcal{R}\Psi)(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{R}(s-x)\,\Psi(s)\,ds$. Уравнение $\mathcal{K}_2^* U = F$ имеет ту же структуру, что и (8). Наконец, уравнение $\mathcal{K}_3^* U \equiv \int_{-\infty}^{\infty} [\mathfrak{W}(s-i-x) + a(s)\,\mathfrak{W}(s+i-x)]\,U(s)\,ds = F(x)$ после применения преобразования Фурье превращается в известное уравнение плавного перехода [3].

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М.: Наука, 1977. 640 с.
3. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1968. 295 с.
4. Рапопорт И. М. О некоторых «парных» интегральных и интегродифференциальных уравнениях.— Сб. тр. ин-та матем. АН УССР. 1949, 12, с. 102—118.
5. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.—Л.: Гостехиздат, 1948. 479 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редакцию
10.04.1980 г.